

На правах рукописи

*Заручевская*

ЗАРУЧЕВСКАЯ ГАЛИНА ВАСИЛЬЕВНА

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕЛКОЗЕРНИСТОГО ЛОКАЛЬНО-  
ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ  
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ МЕТОДОМ СЕТОК**

05.13.18 – математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

**АВТОРЕФЕРАТ**  
**диссертации на соискание ученой степени**  
**кандидата технических наук**

Петрозаводск 2008

Работа выполнена в Поморском государственном университете

Научный руководитель	доктор технических наук, профессор Воробьев Владимир Анатольевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, доцент Попов В.Н. кандидат технических наук, доцент Борматова Е.П.
Ведущая организация	Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН

Защита состоится « 12 » декабря 2008 г. в 10 часов на заседании Диссертационного Совета Д 212.190.03 при Петрозаводском государственном университете по адресу: 185910, Петрозаводск, пр. Ленина, д. 33.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Петрозаводского государственного университета.

Автореферат разослан « 5 » ноября 2008 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета \_\_\_\_\_ Поляков В.В.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность работы.** Параллелизм супер-ЭВМ – магистральный путь развития вычислительной техники. Господствующим способом распараллеливания задач до сих пор является крупноблочное. При этом задача разбивается на большие подзадачи (блоки), предназначенные для параллельного решения на небольшом числе процессоров. Соответственно ориентированы и параллельные алгоритмы численного решения задач.

Очевидно, что с ростом числа процессоров блоки измельчаются, и вычисления в подавляющем большинстве случаев будут идти медленнее: параллелизм вырождается. Избежать вырождения можно только при условии, что обмены происходят и одновременно, и локально, т.е. физическое расстояние между взаимодействующими процессорами мало и не зависит от размера задачи.

При этом задача должна быть разбита на множество небольших однотипных подзадач, которые будут исполняться параллельно на отдельных вычислительных машинах (ВМ). Данные максимально распределены по системе, а программы в каждой ВМ используют минимально возможные наборы данных. При мелкозернистом программировании решающее значение имеет организация обменов данными между ВМ. В общем случае число обменов имеет тот же порядок, что и число вычислительных операций. Таким образом, мелкозернистость, или массовое распараллеливание означает, что в каждом вычислительном процессе в каждый момент времени содержится минимальное число команд (тело внутреннего цикла) и данных (элементы массивов, необходимые для вычисления одного витка цикла). Такой подход к распараллеливанию алгоритмов носит название мелкозернистого локально-параллельного программирования (МЛПП).

В работах В.А. Воробьева рассмотрены три обязательных условия, при которых не происходит снижения производительности МЛПП:

1. Локальность взаимодействий, когда обмен данными происходит только в пределах ограниченного физического и структурного радиуса, независимо от размеров задачи и системы.

2. Параллелизм взаимодействий, когда все возможные в данный момент обмены совершаются параллельно и одновременно с процессом счета.

3. Количество глобальных операций не должно влиять на оценку временной сложности задачи.

В работах Молчанова И.Н., Галба Е.Ф., Воеводина В.В., Родрига Г., Ильина В. П. , Марчук Г.И., Фета Я. И. , Ортега Дж. и др. рассматриваются исключительно крупноблочные алгоритмы решения задач математической физики, предназначенные для вычислительной техники со стандартной системой коммутаций типа линейка, решетка, кольцо, кольцо с хордами, гиперкубовая архитектура, универсальная связь и т.п. В более поздних работах (Гергель В.П., Воеводин В.В., Корнеев В.В.) рассматривается структура под названием «решетка-тор». Эта структура появляется в технологии параллельного программирования MPI. Так, Корнеев В.В. приводит пример перемножения двух матриц больших размерностей в торе. В этом алгоритме элементы матрицы циклически распределены в узлах тора, число обменов минимизировано, обмен данными производится блоками. Такая реализация параллельного перемножения матриц относится к блочному типу. Если авторы упоминали об использовании решетки-тора для решения сеточных задач математической физики (Гергель В.П.), то на самом деле в алгоритме оказывались задействованы только узлы и связи решетки, а связи противоположных сторон не использовались. В своей работе В.П.Ильин упоминает о «мелкозернистом распараллеливании» для решетки с числом процессоров, равным числу узлов сеточной области, но связи рассмотренного им алгоритма не являются локальными. Заметим, что ни один из авторов МЛП-алгоритмы не рассматривает, ориентируясь на возможности реально существующей вычислительной техники. Таким образом, разработка и исследование МЛП-алгоритмов для задач математической физики – одно из пер-

спективных направлений современного параллельного программирования. Актуальность выполненной работы состоит в создании и анализе ряда МЛП–алгоритмов для задач математической физики. В работе Бадман О.Л. для этих целей применяются модели клеточных автоматов.

**Цель диссертации** - разработка мелкозернистых локально-параллельных алгоритмов решения задач математической физики.

Для достижения поставленной цели поставлены и решены следующие **задачи**:

- Задать особенности параллельной архитектуры MIMD (МКМД) - машины, для которой будет эффективен МЛП–стиль программирования.
- Определить основные положения стиля МЛП–программирования.
- Рассмотреть специальные структуры межпроцессорных связей, используемые для разработки эффективных МЛП–алгоритмов.
- Предложить варианты исполнения МЛП–алгоритмов некоторых сеточных задач математической физики в КАИС–структурах с иллюстрацией размещения в ней обрабатываемых данных.
- Разработать программу, в которой показаны результаты вычислений некоторых алгоритмов задач математической физики и оценки эффективности мелкозернистых локально-параллельных алгоритмов.

#### **На защиту выносятся**

1. Разработанная трехмерная структура межпроцессорных связей–тороидальный куб (конструкция вложенных торов).
2. Разработанные специфические мелкозернистые локально–параллельные алгоритмы для задач математической физики.
3. Программа для решения задач математической физики в методе сеток с вычислением оценок параллелизма для МЛП –алгоритмов.

**Методы исследования.** Для разработки новых МЛП–алгоритмов использовались основные положения теории однородных вычислительных структур, теории разностных схем, теории алгоритмов.

**Практическая ценность работы.** Практическая ценность проведенного исследования заключается в том, что полученные в ней результаты могут быть использованы для повышения эффективности численных процедур решения задач математической физики, которые применимы к изучению многих физических процессов и явлений. Специальные вычислительные системы, предназначенных для решения этого круга задач, отличающихся большой размерностью, применяются во многих отраслях промышленности, народного хозяйства и военно-технического комплекса. В частности, к таким параллельным вычислительным архитектурам относятся двумерные и трехмерные тороидальные структуры ОВС. Перспективность применения этих систем для разработки МЛП–алгоритмов решения задач математической физики в методе сеток доказана в настоящем диссертационном исследовании. В настоящее время результаты диссертационного исследования включены в дисциплину «Архитектура компьютера», которая читается студентам 5 курса специальности 050201.65 «Математика» с дополнительной специальностью «Информатика» (квалификация учитель математики) математического факультета ГОУ ВПО «Поморский государственный университет имени М.В. Ломоносова». Применение подтверждают приложенные лекционные слайды и акт о внедрении в образовательный процесс.

**Научная новизна работы.** Разработана новая трехмерная структура межпроцессорных связей– тороидальный куб для решения трехмерных задач математической физики методом сеток.

Разработаны новые специфические мелкозернистые локально–параллельные алгоритмы для задач математической физики с иллюстрацией межпроцессорных обменов и вложения данных в двумерную и трехмерную тороидальную структуры – для явного чебышевского метода решения двумерных и трехмерных задач Дирихле для уравнения Пуассона, для точечного метода верхней релаксации при естественном упорядочении неизвестных, для разностной схемы расщепления двумерного и трехмерного уравнений теплопроводности.

сти. Показано, что все методы (за исключением точечного метода верхней релаксации при естественном упорядочении неизвестных), обладают максимальной степенью параллелизма.

Разработана программа «Решение задач математической физики в методе сеток с вычислением оценок параллелизма для МЛП – алгоритмов».

**Апробация работы.** Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на: Втором Международном научно–практическом семинаре и Всероссийской молодежной школе «Высокопроизводительные параллельные вычисления на кластерных системах». (Нижний Новгород, 2002); Четвертом Международном научно-практическом семинаре и Всероссийской молодежной школе «Высокопроизводительные параллельные вычисления на кластерных системах». (Самара, 2004); ПХХ Ломоносовских чтениях, (Архангельск, 2006); Шестом Международном научно–практическом Семинаре и Молодежной Школе «Высокопроизводительные параллельные вычисления на кластерных системах». (Санкт–Петербург, 2006); IХХ Ломоносовских чтениях, (Архангельск, 2007); Седьмом Международным научно–практическим Семинаром и Молодежной Школой «Высокопроизводительные параллельные вычисления на кластерных системах». (Нижний Новгород, 2007).

**Публикации.** Основные результаты опубликованы в 10 работах, в том числе в 3-х статьях в журналах, входящих в список изданий, рекомендованных ВАК. Список основных работ приведен в конце автореферата.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Объем диссертации составляет 198 машинописных страниц, текст содержит 41 рисунок. Список литературы включает 60 наименований.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** обосновывается актуальность темы диссертации, формулируются цели работы, а также приводится краткое содержание глав диссертации.

**В первой главе** приведена классификация ЭВМ, предложенная Флинном.

Представлено описание типов межпроцессорных связей, используемых у других авторов (Молчанова И.Н., Галба Е.Ф., Воеводина В.В., Ильина В. П., Ортега Дж. и др.). Приведены коэффициенты, характеризующие эффективность параллельных алгоритмов. Рассмотрены некоторые идеи концепции ОВС и описана архитектура ОВС, предназначенная для выполнения алгоритмов в этом стиле программирования. Дано описание одного из видов программирования – мелкозернистого локально–параллельного программирования.

Впервые сформулированы требования к архитектуре MIMD–машины (МКМД- много потоков команд, много потоков данных; к этому типу относятся многопроцессорные ЭВМ с распределенной памятью), при которых стиль МЛП – программирования был наиболее эффективен:

1. Парное соединение процессоров осуществляется за очень короткий промежуток времени и поэтому оно не учитывается.

2. Все возможные в данный момент обмена машинными словами совершаются параллельно и одновременно с процессом счёта за время, сравнимое со временем выполнения одной арифметической операции (из-за близости связанных процессоров в физическом пространстве).

3. Имеется возможность программировать структуру межпроцессорных связей.

В п.1.3.5 перечислены преимущества использования тороидальной структуры для МЛП-алгоритмов:

1. Эта структура позволяет «масштабировать» сетку любой размерности, но не по подобластям, а по соответствующим кратным узлам (процессор с координатой  $(k, p)$  обрабатывает вычисления в узлах сетки с номерами  $(k+aN, p+bM)$ , где  $(N, M)$ -размерность тора,  $a, b \in \mathbb{Z}$ ). Такое распределение данных называется циклическим и сохраняет вычисления локальными и мелкозернистыми, так как данные, необходимые для расчета в каждом витке цикла, располагаются в ближайших связанных процессорах.

2. Известно, что тороидальная структура изоморфна решетке (сетке) про-



цессоров, у которой граничные процессоры на противоположных сторонах соединены регулярным каналом. Этот факт является основанием для физической реализации подобной структуры на планарной технологии СБИС.

С другой стороны, тороидальная конструкция вложима в физическое пространство и позволяет обеспечить более эффективный теплоотвод: внутренняя поверхность тора может быть использована как расширитель для испарения хладагента, например, фреона.

3. Разработанные МЛП-алгоритмы используют внутренний параллелизм сеточных методов, их вычислительная сложность равна вычислительной сложности соответствующего быстрее алгоритма для однопроцессорных машин, поэтому их эффективность при  $t_{сдв}=0$  равна 1. Так, МЛП-алгоритмы в тороидальных структурах для разностных схем эллиптических уравнений не требуют использования так называемых «дополнительных сеточных прямых». Для разностных схем, решаемых с помощью метода прогонки, не нужно прибегать к «распараллеливанию» этого метода согласно алгоритмам Яненко–Коновалова и их модификациям, что существенно снижает вычислительную сложность алгоритмов.

Для мелкозернистого распараллеливания трехмерных задач введена новая структура – процессорный тороидально связанный куб  $C \times D \times E$ . Эту структуру можно рассматривать как продолжение процессорного куба размерностью  $C \times D \times E$ . Каждый процессор обозначается  $P_{i,j,k}$ , где  $i, j, k$  – координаты узла, в котором располагается процессор. Дополним процессорный куб следующими

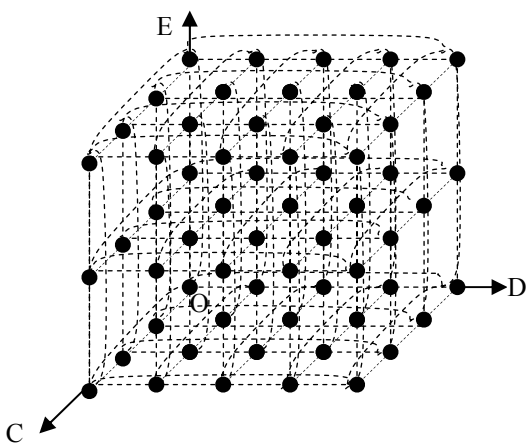


Рис. 1

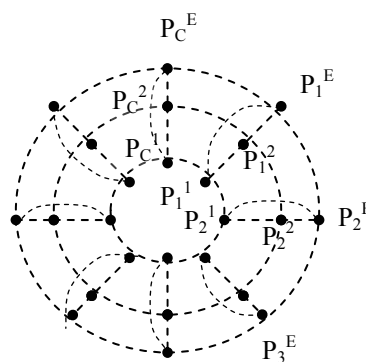


Рис. 2

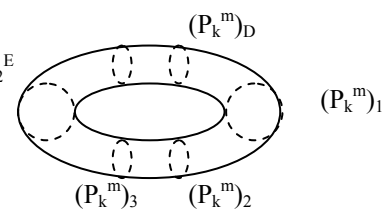


Рис. 3

связями: каждый процессор  $P_{1,j,k}$  соединим регулярным каналом с процессором  $P_{C,j,k}$ ,  $j=1..D$ ,  $k=1..E$ ;  $P_{i,1,k}$  соединим регулярным каналом с процессором  $P_{i,D,k}$ ,  $i=1..C$ ,  $k=1..E$ ;  $P_{i,j,1}$  соединим регулярным каналом с процессором  $P_{i,j,E}$ ,  $i=1..C$ ,  $j=1..D$ . Получим новую структуру – тороидально связанный куб  $C \times D \times E$ , изображенный на рис. 1. Заметим, что каждая плоскость, параллельная плоскостям  $COD$ ,  $COE$  и  $DOE$  и содержащая процессорные узлы, представляет собой тороидальную структуру.

Опишем еще одну структуру, в которой так же могут рассматриваться трехмерные алгоритмы. Расположим  $E \times C$  процессоров в  $E$  колец с одним общим центром (рис.2) и определим для них следующую нумерацию: верхний индекс означает номер кольца, а нижний - номер процессора в кольце. Меж-процессорные связи показаны штрихпунктирной линией. Пусть имеется  $D$  вложенных кольцевых структур, описанных выше. Расположим и занумеруем эти кольцевые структуры так, как показано на рис. 3. Обозначение  $(P_k^j)_m$  означает, что процессор принадлежит  $m$ -ой кольцевой структуре на кольце с номером  $j$  и занимает на нем  $k$ -тую позицию. Будем полагать, что процессоры с одинаковыми первыми нижними индексами  $k$  и верхними индексами  $j$  соединены общим регулярным каналом. Очевидно, что структура состоит из числа  $E$  вложенных друг в друга торов, соединенных специальным образом, причем она изоморфна тороидально связанному кубу  $C \times D \times E$ , описанному выше. Поэтому алгоритмы, разработанные для одной из этих структур, будут иметь эквивалентную интерпретацию для другой, и наоборот. Очевидно, что обе структуры вложимы в физическое пространство, однако не являются планарными. Гипотетически можно предположить, что конструкция вложенных торов позволит обеспечить теплоотвод: их внутренняя полость может быть использована как расширитель для испарения хладагента. Заметим, что конструкция вложенных торов содержит на порядок меньше удаленных связей, чем тороидально связанный куб, а значит, обеспечивает большую эффективность мелкозернистому локально-параллельному стилю программирования.

Таким образом, впервые обоснована возможность использования тороидальных структур для МЛП – вычислений, в том числе в сеточных методах решения задач математической физики.

**Во второй главе** рассмотрены параллельные алгоритмы в методах сеток решения задач математической физики для MIMD–машин с распределенной памятью, предложенные различными авторами: для явного чебышевского метода решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона, для точечного метода верхней релаксации при естественном и красно-черном упорядочении неизвестных, многосеточный метод, решение параболических уравнений с использованием явных и факторизованных разностных схем, параллельные вычисления с распараллеливанием прогонки, параллельные неявные методы переменных направлений.

При описании алгоритмов параллельных вычислений на ЭВМ класса MIMD авторы полагали, что MIMD – машина состоит из  $p$  одинаковых процессоров, каждый из которых обладает определенным объемом своей локальной памяти (одинаковым для всех параллельных процессоров) и способен осуществлять численную обработку информации в автономном и управляемом режимах.

При рассмотрении **эллиптических уравнений** в качестве модельной задачи разберем **задачу Дирихле для самосопряженного уравнения второго порядка** в прямоугольнике

$$\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma = \{(x, y): 0 \leq x \leq \ell_1, 0 \leq y \leq \ell_2\}.$$

$$Lu = - \left( \frac{\partial}{\partial x} (k_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (k_2(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}) \right) = f(x, y), x \in \Omega, \quad (1)$$

$$u = g(x, y), (x, y) \in \Gamma, 0 < c_1 \leq k_\alpha \leq c_2, \alpha = 1, 2.$$

В области  $\bar{\Omega}$  введем равномерную по обоим переменным сетку  $\omega$ . Тогда задаче (1) на сетке  $\omega = \omega \cup \gamma$  поставим в соответствие разностную задачу:

$$\Delta v = - \left( (a_1(x, y) v_x^-)_x + (a_2(x, y) v_y^-)_y \right) = f(x, y), (x, y) \in \omega, \quad (2)$$

$$v = g(x, y), (x, y) \in \gamma, a_1(x, y) = k_1(x - 0,5h_1, y); a_2(x, y) = k_2(x, y - 0,5h_2).$$

Для решения задачи (2) явным чебышевским методом задают на  $\omega$  начальное приближение  $v^{(0)}$  и величину  $\varepsilon$ , определяющую окончание итерационного процесса. Каждое последующее приближение вычисляется по формуле

$$v^{(k+1)} = v^{(k)} + \tau_{k+1}(f - \Lambda v^{(k)}), \quad v^{(k)}|_{\gamma} = g, \quad (3)$$

где  $\{\tau_k\}$  - оптимальный чебышевский набор параметров.

Для решения задачи используется структура межпроцессорных связей

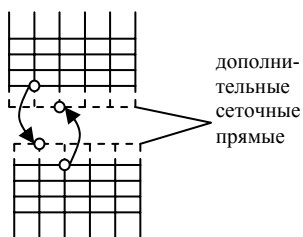


Рис. 2.3

типа линейка, состоящая из  $p$  процессоров: область  $\omega$  разбивается на  $p$  подобластей прямыми, перпендикулярными той координатной оси, вдоль которой больше узлов разбиения, так, чтобы время вычислений на одной итерации в каждой  $\omega_*^s$  было примерно одинаковым. Расширим

все подобласти  $\omega_*^s$ , кроме  $\omega_*^1$  и  $\omega_*^p$ , в обе стороны вдоль оси  $Ox$  на шаг сетки, а сеточные подобласти  $\omega_*^1$  и  $\omega_*^p$ , расширим на шаг сетки вправо и влево соответственно и обозначим их через  $\omega^s$ . Множество внутренних узлов  $\bar{\omega}^s$  обозначим  $\omega^s$ . 1) Задаем начальное приближение  $v(0)$  в каждой подобласти  $\omega^s$ . Вводим в каждый ПП величину  $\varepsilon$ . Вычисляем и храним во всех ПП  $\{\tau_k\}$ . 2) В каждом ПП в узлах сетки  $\omega^s$  одновременно и независимо находим  $(k+1)$ -е приближение к решению по формуле (3). 3) Последовательно устанавливается два раза связь между ПП таким образом, чтобы в результате этого ПП, содержащие соседние подобласти, соединялись каждый раз попарно между собой. После каждого такта установления связи между ПП они обмениваются значениями  $v^{(k+1)}$ , находящимися в приграничных узлах, прилегающих к дополнительным сеточным прямым. После этого переходим на шаг 2).

Итак, задача разбивается на крупные блоки, элементарные машины обмениваются потоком данных, т.е. алгоритм относится к крупноблочному типу.

Аналогичный прием используется при распараллеливании метода верхней релаксации при естественном и красно-черном упорядочении неизвестных,

многосеточном методе и распараллеливании явных разностных схем для параболических уравнений.

При рассмотрении **параболических уравнений** в качестве модельного примера предлагается схема расщепления двумерного уравнения теплопроводности. Для её распараллеливания приводится описание алгоритма параллельной прогонки, предложенного Яненко и переработанного Коноваловым. Его основная идея состоит в следующем. Исходная расчетная область делится на некоторое число подобластей одинакового размера, соответствующее числу процессоров  $p$ . Решение исходной разностной задачи с трехдиагональной матрицей в каждой расчетной подобласти  $\Omega_i$  (вычисляемое на соответствующем процессоре) представляется в виде следующей линейной комбинации:

$$u^i = \alpha_{i-1} u_{10}^i + \alpha_i u_{01}^i + u_{00}^i, \quad (4)$$

где функции  $u_{10}^i$ ,  $u_{01}^i$ ,  $u_{00}^i$  полностью определены (через уравнения и граничные условия) и играют роль некоторого базиса, а значения искомой функции на границе  $\Omega_i$  -  $\alpha_{i-1}$  и  $\alpha_i$  пока не известны. В результате такого разделения функции базиса могут быть определены независимо с помощью алгоритма скалярной («однопроцессорной») прогонки, то есть решаются три (или две) задачи для нахождения неизвестных  $u_{10}^i$ ,  $u_{01}^i$ ,  $u_{00}^i$ .

Значения базисных функций в приграничных точках позволяют сформулировать задачу (путем вычисления коэффициентов новой системы уравнений также с трехдиагональной матрицей) для нахождения неизвестных  $\alpha_i$ , ( $i=0, \dots, p-1$ ).

Эта задача решается на одном из процессоров, например, нулевым (предварительно ему пересылаются все значения коэффициентов новой задачи). Затем полученные граничные значения  $\alpha_i$  рассылаются в соответствующие процессоры, и каждый процессор восстанавливает свою часть искомого решения по формуле (4).

В п.2.2.4 описываются параллельные алгоритмы решения двумерных и

трехмерных сеточных краевых задач на решетке процессоров с разделенной памятью, предложенные Ильиным В.П. Показано применение неявных методов переменных направлений с использованием блочного метода циклической редукции без обратного хода для решения трехдиагональных "одномерных" систем. Для повышения быстродействия предлагается архитектура двумерной бициклической сети.

Анализ на соответствие стилю МЛПП показал, что все алгоритмы являются крупноблочными. Если в алгоритме при определенном распределении данных в структуре присутствует локальная связь по данным, то для него в главе 3 рассматривается МЛП-реализация.

**В третьей главе** представлены новые разработанные МЛП-алгоритмы для задач разностных схем, решаемых с помощью метода прогонки с использованием обеих тороидальных структур. Представлены МЛП-алгоритмы для явного чебышевского метода решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона, для точечного метода верхней релаксации при естественном упорядочении неизвестных, для четырехточечной неявной разностной схемы одномерного уравнения теплопроводности, для разностной схемы расщепления трехмерного уравнения теплопроводности.

Рассмотрим выполнение алгоритма параллельных вычислений, основанного на *явном чебышевском методе* в тороидальной структуре процессоров  $E_2\{C,D\}$ .

Распределим ячейки области  $\omega$  таким образом, чтобы каждому процессору тора  $E_2\{C,D\}$  с координатами  $(x,y)$  поставить в соответствие ячейки сетки  $(x+Ck,y+Dn)$ ,  $k,n \in \mathbb{N}$ , т.е. область  $\omega$  разбивается на  $([N_1/C]+1) \cdot ([N_2/D]+1)$  подобластей  $\omega^{k,n}$  размерностью  $C \times D$ , где  $k=1, \dots, ([N_1/C]+1)$ ,  $n=1, \dots, ([N_2/D]+1)$ , прямыми, параллельными обоим координатным осям.

Шаг 1. Задаем начальное приближение  $v^{(0)}$ . Вводим в каждый процессор счетчик итераций  $t$ ,  $t=0$  в начале выполнения программы. Вычисляем и храним во всех процессорах параметры  $\{\tau_k\}$ .

Шаг 2. Рассмотрим вычисление приближения  $v^{(1)}$  в подобласти  $\omega^{1,1}$ . Чередуя сдвиги значений  $v_{i,j}$  по регулярному каналу вправо, влево, вниз и вверх, процессоры получают необходимые для расчета значения. Граничные процессоры  $P(C,j)$  принимают данные процессоров  $P(1,j)$ , —они содержат значения  $v_{kC+1,j}^0$ ; аналогично процессоры  $P(i,D)$  принимают данные  $v_{i,nD+1}^0$  процессоров  $P(i,1)$ . Неиспользуемые данные будут теряться либо не учитываться.

Шаг 3. Каждый процессор вычисляет значение  $v_{i,j}^1$  в подобласти  $\omega^{1,1}$ . Вычисление значения  $v_{i,j}^1$  в остальных подобластях  $\omega^{k,n}$ , где  $k=1, \dots, ([N_1/C]+1)$ ,  $n=1, \dots, ([N_2/D]+1)$ , осуществляется аналогично (см. п. 2 и п.3.).

Шаг 4. ВМ увеличивает значение счетчика  $t$  на 1. Если  $t=N+1$ , ВМ посылает флажок  $\alpha_{i,j}=1$  на магистральный канал.

Шаг 5. Как только все ВМ отправят на магистральный канал флажки, вычислительный процесс прерывается во всех ВМ и хост — машина через магистральный канал выводит вычисленные значения. Операция прерывания является единственной глобальной операцией.

При  $t_{\text{сдвиг}} \approx 0$  коэффициент ускорения  $k_y = \frac{T_1}{T_p} \approx CD$  и коэффициент эффективности

$k_3 \approx 1$ , т.е. параллелизм максимален.

Мелкозернистое распараллеливание задачи Дирихле для самосопряженного уравнения третьего порядка в тороидальном кубе ( $k_3 \approx 1$ ) и точечного метода верхней релаксации при естественном упорядочении неизвестных основано ( $k_3 \approx 1/C$ ) на том же подходе, что и распараллеливание явного чебышевского метода.

Рассмотрим параллельный алгоритм решения разностной схемы для **задачи Коши для двумерного уравнения теплопроводности** на примере следующей разностной схемы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tilde{u}_{mn} - u_{mn}^p}{\tau} &= \frac{1}{2} (\Lambda_{xx} u_{mn}^p + \Lambda_{yy} \tilde{u}_{mn}), \\ \frac{u_{mn}^{p+1} - \tilde{u}_{mn}}{\tau} &= \frac{1}{2} (\Lambda_{xx} u_{mn}^{p+1} + \Lambda_{yy} \tilde{u}_{mn}) + f(x, y, t), \\ u_{mn}^0 &= \Psi(x_m, y_n). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Преобразуем схему (5):

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u}_{m,n+1} - 2\left(1 + \frac{h^2}{\tau}\right)\tilde{u}_{m,n} + \tilde{u}_{m,n-1} &= -u_{m+1,n}^p + 2\left(1 - \frac{h^2}{\tau}\right)u_{m,n}^p - u_{m-1,n}^p, \\ u_{m+1,n}^{p+1} - 2\left(1 + \frac{h^2}{\tau}\right)u_{m,n}^{p+1} + u_{m-1,n}^{p+1} &= -\tilde{u}_{m,n+1} + 2\left(1 - \frac{h^2}{\tau}\right)\tilde{u}_{m,n} - \tilde{u}_{m,n-1} - h^2 f_{mn}^{p+1}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Этап 1. Хост-машина рассчитывает  $\tau/h^2$ ,  $2(1+\tau/h^2)$  и  $2(1-\tau/h^2)$ , рассылает эти значения в каждый процессор тороидальной структуры; исходные данные  $u_{mn}^0$  и  $h^2 \cdot f_{mn}^p$  рассылаются в процессоры  $(\text{mod}(m,C), \text{mod}(n,D))$ . Так же машина вычисляет  $\aleph_k$  и рассылает в процессоры  $(\text{mod}(k,C), \text{mod}(n,D))$  и  $(\text{mod}(m,C), \text{mod}(k,D))$ ;  $m, n, k=1..(N-1)$ .

Этап 2. В каждом горизонтальном кольце системы сначала сдвигом вправо, а затем влево передаются значения  $u_{m,n}$  соседним процессорам. Далее каждый процессор  $s$  рассчитывает правую часть первого уравнения (6)  $-u_{m+1,n}^p + 2\left(1 - \frac{h^2}{\tau}\right)u_{m,n}^p - u_{m-1,n}^p = F_{m,n}^p$  в подобласти  $\omega^{1,1}$ . Аналогично вычисляются значения  $F_{m,n}^p$  в остальных площадках  $\omega^{k,n}$ .

Этап 3. В каждом вертикальном кольце процессоров, составляющем тор, рассчитываются  $\tilde{u}_{mn}$ ,  $m=\overline{1..C}$ . Согласно методу прогонки в процессорах рассчитываются:  $\wp_1$  в процессорах  $(\text{mod}(m,C), 1)$ ;  $\wp_{N-1}$  в процессорах  $(\text{mod}(m,C), \text{mod}(N-1,D))$ . Значение  $\wp_1$  передается параллельным сдвигом вверх в каждой кольцевой структуре для расчета  $\wp_2$  по формуле  $\wp_k = (\wp_{k-1} - F_{m,k}) \aleph_k$ ,  $k=2..N-2$  в процессорах  $(\text{mod}(k,C), \text{mod}(m,D))$ . Подобно расчету  $\wp_{N-2}$  находятся остальные  $\wp_k$ ,  $k=2..N-2$ . Затем вычисляется  $\tilde{u}_{mN-1} = (\wp_{N-1} + \aleph_{N-1} \cdot \wp_{N-2}) / (1 - \aleph_{N-1} \cdot \aleph_{N-2})$  в процессорах  $(\text{mod}(m,C), \text{mod}(N-1,D))$  и сдвигом вниз пересылаются соседним про-



цессорам для расчета  $\tilde{u}_{mN-2}$  по формуле  $\tilde{u}_{mn} = \mathcal{S}_n \cdot \tilde{u}_{m+1} + \wp_n$ . Аналогично расчету  $\tilde{u}_{mN-2}$  находятся остальные  $\tilde{u}_{mn}$ ,  $n=(N-2)..2$ . Подобным образом находится следующая партия  $\tilde{u}_{mn}$ ,  $m=\overline{(C+1)..(2C)}$ ; затем при  $m=\overline{(2C+1)..(3C)}$  и т.д., пока не будет рассчитана последняя партия при  $m=\overline{\left[\frac{M-1}{C}\right]..(M-1)}$ .

Этап можно модернизировать, вычисляя прогоночные коэффициенты  $\wp_k$ , а затем и значения  $\tilde{u}_{mn}$  ( $u_{mn}$ ) «волной», т.е. каждая  $i$ -ая вертикальная кольцевая структура на третьем этапе одновременно вычисляет значения  $\tilde{u}_{i,n}$ ,  $\tilde{u}_{i+C,n}$ ,  $\tilde{u}_{i+2C,n}$ , ...,  $\tilde{u}_{i+C(D-1),n}$ , затем  $\tilde{u}_{i+CD,n}$ ,  $\tilde{u}_{i+C(D+1),n}$ ,  $\tilde{u}_{i+C(D+2),n}$ , ...,  $\tilde{u}_{i+C(2D-1),n}$  и т.д.

Этап 4. Каждый процессор в подобласти  $\omega^{1,1}$  сначала сдвигом вверх, а затем вниз передаются значения  $u_{m,n}$  соседним процессорам и выполняет расчета правой части второго уравнения (6). Аналогично вычисляются значения  $Y_{m,n}^p$  в остальных площадках  $\omega^{k,n}$ .

Этап 5. В каждом горизонтальном кольце процессоров, составляющих процессорную матрицу, согласно методу прогонки рассчитываются  $u_{m,n}$ . Вычислительный процесс такой же, как и в 3 этапе.

Вычислительный процесс заканчивается, когда выполнен расчет последнего слоя  $u^T$ . Цикл повторяется  $T$  раз.

«Модернизированный» алгоритм на всех этапах (не связанных с глобальными операциями) отвечает требованиям локальности и мелкозернистости. При  $t_{\text{сдвиг}} \approx 0$  «модернизированный» вариант достигает максимального параллелизма, т. е.  $E_{CD}' \approx 1$ .

В случае задачи Коши для трехмерного уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z, t), 0 < t < T, -\infty < x, y, z < \infty \\ u(x, y, z, 0) = g(x, y, z), \end{cases}$$

Разностная схема для этой задачи имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\tilde{v}_{mnk} - v_{mnk}^p}{\tau} = \frac{\tilde{v}_{m+1,nk} - 2\tilde{v}_{mnk} + \tilde{v}_{m-1,nk}}{h^2} \\ \frac{v'_{mnk} - \tilde{v}_{mnk}}{\tau} = \frac{v'_{mnk} - 2v'_{mnk} + v'_{mnk}}{h^2} \\ \frac{v_{mnk}^{p+1} - v'_{mnk}}{\tau} = \frac{v_{mnk-1}^p - 2v_{mnk}^p + v_{mnk+1}^p}{h^2} + f_{mnk}^p \\ v_{mnk}^0 = g_{mnk}^0 \end{array} \right.$$

Преобразуем каждое уравнение разностной схемы:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{v}_{m+1,n,k} - (2 + h^2 / \tau)\tilde{v}_{m,n,k} + \tilde{v}_{m-1,n,k} = -(h^2 / \tau)v_{m,n,k}^p = F_m \\ v'_{m,n-1,k} - (2 + h^2 / \tau)v'_{m,n,k} + v'_{m,n+1,k} = -(h^2 / \tau)\tilde{v}_{m,n,k} = \tilde{F}_m \\ v_{m,n,k-1}^{p+1} - (2 + h^2 / \tau)v_{m,n,k}^{p+1} + v_{m,n,k+1}^{p+1} = -(h^2 / \tau)v'_{m,n,k} - h^2 f_{m,n,k} = F'_k \\ v_{mnk}^0 = g_{mnk}^0 \end{array} \right.$$

Из последнего уравнения известны краевые условия  $v_{0,0}^v, v_{0,N}^v, v_{N,0}^v, v_{N,N}^v, v=0..M$ .

Разностная схема неявная, безусловно устойчивая и решается методом прогонки. Составим МЛП – алгоритм поиска решения задачи в тороидальном процессорном кубе.

Этап 1. Хост-машина рассчитывает  $\aleph_{i=1} = \aleph_{N-1} = 1/(2+h^2/\tau)$ ,  $\aleph_i = 1/(2+h^2/\tau - \aleph_{i-1})$ ,  $i=1..(N-1)$  и циклически рассылает эти значения в каждый процессор линейки, составляющей тороидально связанный куб.

Этап 2. Пусть вычисляется первая партия значений  $\tilde{u}_{i,n,k}$  при  $n=\overline{1..D}$   $k=\overline{1..E}$ . В каждом кольце, образованном процессорами с фиксированными координатами  $d, e$  параллельно рассчитываются  $\wp_1 = (u_{0,n,k}^p + (h^2/\tau)u_{1,n,k}^p)\aleph_1$  и  $\wp_{N-1} = (u_{N,n,k}^p + (h^2/\tau)u_{N-1,n,k}^p)\aleph_{N-1}$  соответственно процессорами  $(1, d, e)$  и  $[\text{mod}(N-1, C), d, e]$ , где  $d=\overline{1..D}$ ,  $e=\overline{1..E}$ . Для расчета  $\wp_2$  значение  $\wp_1$  передается параллельным сдвигом в направлении роста координаты  $c$  в каждой кольцевой

структуре  $[\text{mod}(i, C), d, e]$  (при фиксированных  $d$  и  $e$ , где  $d = \overline{1..D}$ ,  $e = \overline{1..E}$ ) по формуле  $\wp_i = (\wp_{i-1} + (h^2/\tau)u_{i,n,k})\aleph_i$ ,  $i=2..N-2$ . Подобно расчету  $\wp_2$  находятся остальные  $\wp_i$ ,  $i=2..N-2$ . Затем вычисляется  $\tilde{u}_{N-1,n,k} = (\wp_{N-1} + \aleph_{N-1} \cdot \wp_{N-2}) / (1 - \aleph_{N-1} \cdot \aleph_{N-2})$  в процессорах  $[\text{mod}(N-1, C), d, e]$  и сдвигом в направлении убывания координаты  $s$  пересылаются соседним процессорам для расчета  $\tilde{u}_{N-2,n,k}$  по формуле  $\tilde{u}_{i,n,k} = \aleph_i \tilde{u}_{i+1,n,k} + \wp_i$ . Аналогично расчету  $\tilde{u}_{N-2,n,k}$  находятся остальные  $\tilde{u}_{i,n,k}$ ,  $i=(N-2)..2$  процессорами  $[\text{mod}(i, C), d, e]$ .

Подобным образом находится следующая партия  $\tilde{u}_{i,n,k}$  при  $k = \overline{1..E}$ ,  $n = \overline{(D+1)..(2D)}$ ; затем при  $n = \overline{(2D+1)..(3D)}$  и т.д. до  $n = \overline{[(N-1)/D]..(N-1)}$ ; аналогично при  $k = \overline{(E+1)..(2E)}$ , пока не будет рассчитана последняя партия при  $n = \overline{[(N-1)/D]..(N-1)}$  и  $k = \overline{[(N-1)/E]..(N-1)}$ .

Этап можно модернизировать, запуская «волной» на одном кольце, образованном процессорами с фиксированными координатами  $d$  и  $e$ , одновременно  $S$  партий параллельных прогонок (как в двумерном случае).

Этап 3. Аналогично предыдущему этапу, в каждом кольце, образованном процессорами с фиксированными координатами  $s$ ,  $e$  параллельно рассчитываются в направлении роста номеров  $d - \wp_1$ ,  $\wp_{N-1}$  и  $\wp_i$ , а затем в противоположном направлении рассчитываются  $u'_{m,i,k}$ . Исполнение этапа возможно в модифицированном варианте.

Этап 4. Аналогично второму этапу, в каждом кольце, образованном процессорами с фиксированными координатами  $s$ ,  $d$  параллельно рассчитываются в направлении роста номеров  $e - \wp_1$ ,  $\wp_{N-1}$  и  $\wp_i$ , а затем в противоположном направлении рассчитываются  $u_{m,n,i}^{p+1}$ . Результат  $u_{m,n,i}^{p+1}$  записывается в памяти соответствующего процессора.

Этапы 2–4 повторяется  $M$  раз до тех пор, пока не будут вычислены результаты последнего слоя.

Этап 5. Хост–машина собирает полученные данные и делает их доступными для пользователя.

При  $t_{сдв}=0$  параллелизм «модернизированного» алгоритма достигает максимального уровня:  $S'_{CDE}=CDE$ , а  $E'_{CDE}=1$ . На всех этапах «модернизированный» алгоритм является локальным и мелкозернистым.

Предложенные идеи можно использовать для мелкозернистого локального распараллеливания других методов решения разностных схем уравнений математической физики.

**В четвертой главе** рассматривается математическое обоснование вычислений и порядок разработки каждого расчетного модуля программы «Решение задач математической физики в методе сеток с вычислением оценок параллелизма для МЛП –алгоритмов»

**В заключении** сформулированы основные результаты диссертации.

1. Дано описание мелкозернистого локально–параллельного программирования и определены специальные свойства для MIMD–машин, для которых стиль МЛП–программирования будет наиболее эффективным.

2. Показаны преимущества применения для решения задач математической физики в методе сеток такой редко используемой структуры, как тор. Разработана трехмерная структура межпроцессорных связей – тороидально связанный куб.

3. Рассмотрены параллельные алгоритмы в методах сеток решения задач математической физики для MIMD–машин с распределенной памятью, предложенные различными авторами, и проведен их анализ на соответствие стилю МЛП.

4. Разработаны МЛП–алгоритмы для задач математической физики с иллюстрацией межпроцессорных обменов и вложения данных в двумерную и трехмерную тороидальную структуры.

5. Разработана программа «Решение задач математической физики в мето-

де сеток с вычислением оценок параллелизма для МПП–алгоритмов».

#### **Публикации по теме диссертации:**

**1. Заручевская Г.В. Реализация решения разностной схемы расщепления двумерного уравнения теплопроводности в мелкозернистом локально–параллельном стиле программирования.// – Известия Волгоградского государственного технического университета: межвуз. сб. науч. ст. № 1(39) / ВолгГТУ. – Волгоград, 2008 – 120с. – (Сер. Актуальные проблемы управления, вычислительной техники и информатики в технических системах. Вып. 4), с.16- 19.**

**2. Заручевская Г.В. Реализация решения разностной схемы расщепления трехмерного уравнения теплопроводности в мелкозернистом локально–параллельном стиле программирования.// – Системы управления и информационные технологии, 2007, N4(30), с. 91–94.**

**3. Воробьев В.А., Заручевская Г.В. Мелкозернистый локально-параллельный алгоритм для четырехточечной неявной разностной схемы уравнения теплопроводности.// Вестник Поморского Университета, серия «Естественные и точные науки» №2(4), 2003, с.94-102.**

4. Лозинская Г.В. Мелкозернистый локально-параллельный алгоритм для четырехточечной явной разностной схемы управления теплопроводности. С именем Ломоносова. Сборник научных трудов студентов и аспирантов ПГУ. – Архангельск: изд-во ПГУ, 2002. с.263–266.

5. Лозинская Г.В., Кожин И.Н., Дербина Ю.В., Юфрякова О.А., Тестова И.В. Мелкозернистый локально-параллельный алгоритм для решения разностной задачи Дирихле для уравнения Пуассона. XIV международные Ломоносовские чтения. Сборник научных трудов. – Архангельск: изд-во ПГУ, 2002.с.388–390

6. Воробьев В.А., Заручевская Г.В. Мелкозернистый локально–параллельный алгоритм для разностной схемы расщепления уравнения тепло-

проводности // Высокопроизводительные вычисления на кластерных системах. Материалы шестого Международного научно–практического семинара. Том 1 / Под ред. проф. Р.Г. Стронгина. Санкт–Петербург, 2007. 281 с. С.109–116.

7. Воробьев В.А., Заручевская Г.В. Реализация явного чебышевского метода решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в мелкозернистом локально-параллельном стиле // Вестник математического факультета. Вып. 8: межвуз. Сб. науч. трудов; Поморский гос. ун-т им. М.В. Ломоносова. – Архангельск: Поморский университет, 2007. – 155 с. С. 83-87.

8. Кожин И.Н., Воробьев В.А., Лозинская Г.В. Клеточная машина // Высокопроизводительные параллельные вычисления на кластерных системах. Материалы четвертого Международного научно–практического семинара и Всероссийской молодежной школы. Самара, 2004 с. 116–120

9. Заручевская Г.В. Реализация явного чебышевского метода решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в мелкозернистом локально-параллельном стиле // Высокопроизводительные вычисления на кластерных системах. Материалы седьмой Международной конференции-семинара. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2007. 443с. С.163-168.

10. Воробьев В.А., Заручевская Г.В. Реализация явного чебышевского метода решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в мелкозернистом локально-параллельном стиле // Вестник математического факультета. Вып. 8: межвуз. Сб. науч. трудов; Поморский гос. ун-т им. М.В. Ломоносова. – Архангельск: Поморский университет, 2007. – 155 с. С. 83-87.



