

На правах рукописи



**Коврижных Николай Александрович**

**Разработка экономичных схем интегрирования  
структурно разделённых систем  
обыкновенных дифференциальных уравнений**

Специальность 05.13.18 — математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

Автореферат  
диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Работа выполнена на кафедре информационных систем факультета прикладной математики — процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета.

Научный руководитель: **Олемской Игорь Владимирович**  
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Голоскоков Дмитрий Петрович**,  
доктор технических наук, профессор,  
Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций имени проф. М. А. Бонч-Бруевича,  
заведующий кафедрой высшей математики  
**Фалейчик Борис Викторович**,  
кандидат физико-математических наук, доцент,  
Белорусский государственный университет,  
доцент кафедры вычислительной математики

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Федеральный исследовательский центр «Карельский научный центр Российской академии наук»

Защита состоится 21 декабря 2018 г. в 16 часов на заседании диссертационного совета Д 212.190.03 при ФГБОУ ВО «Петрозаводский государственный университет» по адресу: 185910, Республика Карелия, г. Петрозаводск, пр. Ленина, 33.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Петрозаводского государственного университета и на сайте [petsu.ru](http://petsu.ru).

Автореферат разослан «\_\_\_» октября 2018 года.

Ученый секретарь  
диссертационного совета

Воронов Роман Владимирович

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** Системы дифференциальных уравнений являются одним из основных способов математического моделирования. Математическое описание сложных динамических процессов, протекающих в окружающем мире, зачастую приводит к системам, не имеющим аналитического решения. Кроме того, в некоторых задачах (например, в линейных СОДУ большого размера) вывод точного решения может оказаться сопряжён с трудозатратными вычислениями, и получение приближённого решения с некоторой желаемой точностью будет более оправданным. Поэтому численные методы решения систем дифференциальных уравнений всегда будут необходимым инструментом математического моделирования.

В начале XX века немецкий математик Карл Рунге разработал теорию графических численных методов, показав, как с помощью простейших инженерных инструментов на бумаге производить построения, аналогичные сложным математическим операциям вплоть до приближённого интегрирования скалярных дифференциальных уравнений. Развитие вычислительной техники привело к тому, что теория Рунге оказалась не нужна, однако предложенные им идеи привели к созданию явных одношаговых методов Рунге—Кутты, позволявших получать приближённое решение вплоть до четвёртого порядка точности при сравнительно небольших трудозатратах: для точности порядка  $p$  требовалось  $p$  вычислений правой части СОДУ ( $p$ -этапные методы одношаговые методы,  $p \leq 4$ ).

Технологический рывок середины XX века принёс новые возможности ЭВМ и вместе с тем предъявил новые требования к точности численного интегрирования. Безрезультатные годы поиска пятиэтапных методов пятого порядка завершились разработкой теории Джона Бутчера, систематизировавшего процесс нахождения методов Рунге—Кутты. Бутчер показал, что для высоких порядков существуют ограничения («барьеры Бутчера»): при  $p \geq 5$  методы  $p$ -ого порядка требуют не менее  $p + 1$  вычисление правой части СОДУ, а при  $p \geq 7$  — не менее  $p + 2$ . Эти ограничения а также трудоёмкость получения новых методов высокого порядка стали основными аргументами для поиска альтернатив классическим методам типа Рунге—Кутты.

Начиная с 1970-х лет наступает время бурного развития новых методов интегрирования и способов сравнения одних методов с другими. Важными свойствами становятся не только порядок точности, но также возможность автоматического управления длиной шага и устойчивость методов. Эрвин Фельберг одним из первых предложил идею вложенных методов Рунге—Кутты, позволяющих существенно экономить вычисления с помощью автоматического управления длиной шага интегрирования. Благодаря этому методы Рунге—Кутты обрели новую популярность, и вскоре на их основе были созданы схемы Дж. Дорманда и П. Принса. Одна из этих

схем сейчас является основным интегратором в среде Matlab (как функция ode45) и в Python-модуле SciPy (как метод RK45). Один из методов Фельберга является основным интегратором в среде Maple (как метод rkf45).

Один из способов построения новых эффективных методов был предложен И. В. Олемским. Этот способ заключается в преодолении «барьеров Бутчера» с помощью анализа структуры СОДУ, разбиения переменных на группы и модификации классической схемы Рунге—Кутты. Оказалось, что для многих задач, особенно в области механики, возможно сократить количество вычислений правой части системы, сохранив порядок точности. На основе структурного подхода было построено несколько вложенных схем, превосходящих по своим характеристикам известные аналоги. Следует отметить, что поиск таких методов связан с решением громоздких систем алгебраических уравнений, поэтому представляет особый интерес модификация теории Бутчера на случай структурных методов.

Также представляет интерес возможность применения идей структурного подхода не только для численного решения СОДУ. К примеру, в последние десятилетия получили распространение методы решения задач с запаздыванием на основе т.н. непрерывных методов Рунге—Кутты (в этой области стоит отметить работы М. Ценнаро). Как и в уже описанном случае обыкновенных дифференциальных уравнений, для систем специального вида существует возможность модифицировать классическую схему интегрирования, чтобы сократить объём вычислений.

**Целью** работы является проведение исследований, направленных на развитие теоретических подходов и эффективных вычислительных методов, служащих базовым инструментом математического и компьютерного моделирования динамических объектов в задачах небесной механики.

**Научная новизна:** проведён анализ структурных особенностей систем дифференциальных уравнений, описывающих математические модели динамики различных задач небесной механики; построены методы шестого порядка для различного вида структурных особенностей СОДУ, требующие меньших вычислительных затрат по сравнению с известными методами того же класса; теория структурных методов применена к системам уравнений с запаздыванием.

**Практическая значимость** заключается в возможности дальнейшего использования разработанных алгоритмов построения и преобразования систем условий порядка для построения экономичных методов интегрирования высоких порядков. Построенные методы интегрирования могут быть использованы при численном решении задач моделирования динамических систем.

**Методология и методы исследования.** Методологической основой работы служат общая теория явных методов Рунге—Кутты, теория помеченных деревьев Дж. Бутчера, теория устойчивости численных методов интегрирования.

## Основные положения, выносимые на защиту:

1. Проанализированы структурные особенности класса математических моделей небесной механики и продемонстрирован способ модификации этих моделей, позволяющий строить экономичные численные методы их исследования.
2. Разработан общий алгоритм формирования системы условий порядка для экономичных методов численного интегрирования. Построен метод приведения полной системы условий порядка к системе-следствию с более простой структурой связей. На их основе реализован комплекс программ, позволяющий автоматически строить и упрощать системы условий порядка для произвольных структурных классов.
3. Найденны семейства решений систем условий шестого порядка. На их основе построены вложенные схемы шестого порядка точности, требующие меньших вычислительных затрат по сравнению с уже существующими методами. Это преимущество продемонстрировано с помощью разработанной программы, реализующей предложенную схему вместе с алгоритмом автоматического выбора шага интегрирования.
4. Предложена методика исследования устойчивости структурных методов численного интегрирования. Построены области устойчивости некоторых методов.
5. Построены непрерывные экономичные методы интегрирования для моделей, описываемых системами с запаздыванием, и задач, требующих непрерывного приближения к точному решению.

Достоверность полученных результатов обеспечивается сравнением результатов работы построенных методов с известными существующими методами других авторов а также сравнением вычисленных параметров модели с полученными аналитически.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на международной научной конференции по механике «VIII Поляховские чтения» (г. Санкт-Петербург, февраль 2018 г.), международной конференции «International Conference on Computational Science and Applications» (г. Триест, Италия, июль 2017 г.) и на XLVI, XLVII и XLVIII международных научных конференциях «Процессы управления и устойчивость» (г. Санкт-Петербург, апрель 2015, 2016 и 2017 гг.)

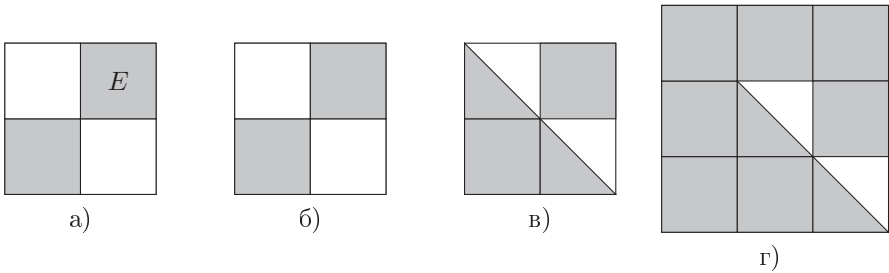
Личный вклад. В диссертации представлены результаты исследований автора. Личный вклад автора состоит в построении системы условий шестого порядка для структурных методов интегрирования и нахождении её решения; в программной реализации предлагаемых алгоритмов и их тестировании на различных математических моделях с предварительной модификацией соответствующих систем дифференциальных уравнений.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 8 печатных изданиях, 2 из которых в изданиях, рекомендованных ВАК.

## Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность проводимых в рамках работы исследований, приведён обзор классической и современной научной литературы по изучаемым проблемам, сформулированы цели, изложены научная новизна и практическая значимость представляемой работы, представлены выносимые на защиту положения.

**Первая глава** посвящена классификации структурных особенностей, встречающихся в системах обыкновенных дифференциальных уравнений. Под структурными особенностями понимается независимость производных каких-либо параметров системы  $\dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n$  от каких-либо параметров  $y_1, \dots, y_n$ .



- а) СОДУ 2-го порядка ( $E$  обозначает единичную матрицу);  
 б) класс  $\mathfrak{A}$ ; в) класс  $\mathfrak{B}$ ; г) класс  $\mathfrak{C}$

Рис. 1 — Структуры допустимых зависимостей для различных классов СОДУ

В §1.1 приводятся определения классов  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  и  $\mathfrak{C}$  и разъясняются взаимосвязи между ними. В общем случае (класс  $\mathfrak{C}$ ) все параметры делятся на три группы — нулевую, первую и вторую — таким образом, чтобы производные параметров в первой и второй группах могли зависеть только от параметров той же группы, имеющих меньший индекс, и от параметров других групп. Ограничений на зависимость производных в нулевой группе нет. В классе  $\mathfrak{B}$  нулевая группа отсутствует, а в классе  $\mathfrak{A}$  запрещены зависимости внутри групп. Частный случай системы класса  $\mathfrak{A}$  — системы второго порядка вида  $y'' = f(x, y)$ , поскольку с помощью введения обозначений  $y_1 = y$ ,  $y_2 = y'$  они могут быть записаны в виде системы первого порядка с перекрёстной системой связей:

$$\begin{cases} y'_1 = y_2, \\ y'_2 = f(x, y_1). \end{cases} \quad (1)$$

Структуру связей СОДУ удобно представлять в матричном виде, отмечая  $(i, j)$ -ю элемент цветом, если  $\dot{y}_i$  зависит от  $y_j$  (см. рис. 1).

В §1.2 приводится общий вид структурной схемы численного интегрирования. В классических одношаговых схемах Рунге—Кутты каждый этап решения системы вида  $y' = f(x, y)$  состоит из вычисления  $f$  целиком. Однако более детальный подход, когда часть только что вычисленных значений используется на этом же этапе, помогает сократить общее количество обращений к правой части системы.

Для систем класса  $\mathfrak{C}$ :

$$\begin{cases} y'_0 = f_0(x, y_0, \dots, y_n), & (2) \\ y'_i = f_i(x, y_0, \dots, y_{i-1}, y_{l+1}, \dots, y_n), & i = 1, 2, \dots, l, & (3) \\ y'_j = f_j(x, y_0, \dots, y_{j-1}), & j = l + 1, \dots, n, & (4) \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_{\nu=0}^n r_\nu, \quad x \in [X_0, X_k] \subset \mathbb{R}, \quad y_s : [X_0, X_k] \longrightarrow \mathbb{R}^{r_s}, \quad s = 0, \dots, n, \\ f_0 &: [X_0, X_k] \times \mathbb{R}^\rho \longrightarrow \mathbb{R}^{r_0}, \\ f_i &: [X_0, X_k] \times \mathbb{R}^{\rho - \hat{r}^i} \longrightarrow \mathbb{R}^{r_i}, \quad \hat{r}^i = \sum_{\nu=i}^l r_\nu, \quad i = 1, 2, \dots, l, \\ f_j &: [X_0, X_k] \times \mathbb{R}^{\rho - \bar{r}^j} \longrightarrow \mathbb{R}^{r_j}, \quad \bar{r}^j = \sum_{\nu=j}^n r_\nu, \quad j = l + 1, \dots, n, \end{aligned}$$

метод интегрирования выглядит следующим образом:

$$y_0(x+h) \approx \tilde{y}_0(x+h) = y_0(x) + h \sum_{\nu=1}^{m_0} b_{0\nu} k_{0,\nu}(h), \quad (5)$$

$$y_i(x+h) \approx \tilde{y}_i(x+h) = y_i(x) + h \sum_{\nu=1}^{m_1} b_{1\nu} k_{i,\nu}(h), \quad i = 1, \dots, l, \quad (6)$$

$$y_j(x+h) \approx \tilde{y}_j(x+h) = y_j(x) + h \sum_{\nu=1}^{m_1} b_{2\nu} k_{j,\nu}(h), \quad j = l + 1, \dots, n, \quad (7)$$

причём  $k_{s,w} \equiv k_{s,w}(h)$  вычисляются в строгой последовательности

$$k_{0,1}, \dots, k_{n,1}, k_{0,2}, \dots, k_{n,2}, k_{0,3}, k_{1,3}, \dots \quad (8)$$

по формулам

$$\begin{aligned}
 k_{0,\nu} = f_0 & \left( x + c_{0\nu}h, \right. \\
 & y_0 + h \sum_{\mu=1}^{\nu-1} a_{00\nu\mu} k_{0,\mu}(h), \\
 & y_1 + h \sum_{\mu=1}^{\nu-1} a_{01\nu\mu} k_{1,\mu}(h), \dots, y_{i-1} + h \sum_{\mu=1}^{\nu-1} a_{01\nu\mu} k_{l,\mu}(h), \\
 & \left. y_{l+1} + h \sum_{\mu=1}^{\nu-1} a_{02\nu\mu} k_{l+1,\mu}(h), \dots, y_n + h \sum_{\mu=1}^{\nu-1} a_{02\nu\mu} k_{n,\mu}(h) \right), \quad (9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{i,\nu} = f_i & \left( x + c_{1\nu}h, \right. \\
 & y_0 + h \sum_{\mu=1}^{\nu} a_{10\nu\mu} k_{0,\mu}(h), \\
 & y_1 + h \sum_{\mu=1}^{\nu} a_{11\nu\mu} k_{1,\mu}(h), \dots, y_{i-1} + h \sum_{\mu=1}^{\nu} a_{11\nu\mu} k_{i-1,\mu}(h), \\
 & \left. y_{l+1} + h \sum_{\mu=1}^{\nu-1} a_{12\nu\mu} k_{l+1,\mu}(h), \dots, y_n + h \sum_{\mu=1}^{\nu-1} a_{12\nu\mu} k_{n,\mu}(h) \right), \quad (10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{j,\nu} = f_j & \left( x + c_{2\nu}h, \right. \\
 & y_0 + h \sum_{\mu=1}^{\nu} a_{20\nu\mu} k_{0,\mu}(h), \\
 & y_1 + h \sum_{\mu=1}^{\nu} a_{21\nu\mu} k_{1,\mu}(h), \dots, y_{i-1} + h \sum_{\mu=1}^{\nu} a_{21\nu\mu} k_{l,\mu}(h), \\
 & \left. y_{l+1} + h \sum_{\mu=1}^{\nu} a_{22\nu\mu} k_{l+1,\mu}(h), \dots, y_n + h \sum_{\mu=1}^{\nu} a_{22\nu\mu} k_{j-1,\mu}(h) \right), \quad (11)
 \end{aligned}$$

где  $i = 1, \dots, l$ ,  $j = l + 1, \dots, n$ . Для структурных классов  $\mathfrak{B}$  и  $\mathfrak{A}$  метод интегрирования соответствующим образом упрощается.

**Вторая глава** посвящена обзору реально встречающихся математических моделей и систем дифференциальных уравнений, которыми они описываются. Рассмотрены причины появления структурных особенностей. На ряде классических моделей продемонстрирована техника, позволяющая сводить соответствующие СОДУ к классам  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  и  $\mathfrak{C}$ .

В §2.1 и §2.2 рассмотрены различные модели задачи трёх тел. Наиболее удобный способ их описания даёт выбор вращающейся системы



координат, в которых возникает зависимость вторых производных от первых. Однако структура этих связей часто позволяет произвести перегруппировку параметров, сводящую систему к какому-либо структурному классу. К примеру, ограниченная задача трёх тел, как правило, описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2n\dot{y} + n^2x + \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \ddot{y} = -2n\dot{x} + n^2y + \frac{\partial U}{\partial y}, \\ \ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}, \end{cases} \quad (12)$$

и при должном разбиении параметров  $x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z}$  на две группы эта система будет относиться к классу  $\mathfrak{B}$ . Соответствующее преобразование матрицы зависимостей представлено на рис. 2. После преобразования производные всех параметров системы зависят только от параметров своей группы, имеющих меньший индекс, и от параметров другой группы.

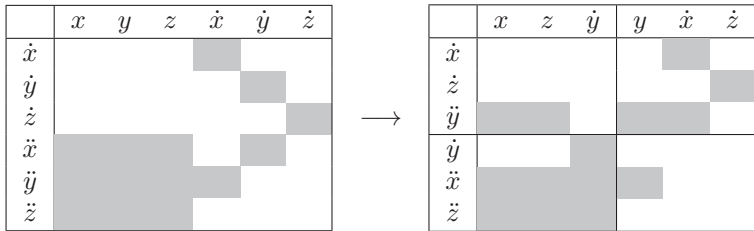


Рис. 2 — Перестановка переменных для системы 12

В §2.3 рассмотрены модели движения пары искусственных спутников, соединённых электродинамическим тросом. К чисто механической модели добавляется учёт силы Ампера, вызываемой магнитным полем Земли, но структура возникающей системы дифференциальных уравнений также позволяет свести её к классу  $\mathfrak{B}$ .

В §2.4 для моделей, в которых возникают дифференциальные уравнения высшего порядка  $n > 2$ , предложен алгоритм сведения их к системе класса  $\mathfrak{B}$  при предварительной замене переменных с избавлением от производной  $(n-1)$ -го порядка. Дифференциальные уравнения третьего порядка могут возникать, например, при учёте силы Абрагама—Лоренца, действующей на точечный заряд со стороны поля, вызванного его собственным неравномерным движением:

$$\vec{F} = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \frac{d\vec{a}}{dt},$$

где  $a$  — вектор ускорения. Рассмотрен ряд других моделей, где возникают уравнения третьего порядка.

**Третья глава** посвящена проблемам построения структурных схем численного интегрирования.

В §3.1 даётся общий алгоритм вывода условий порядка для структурных методов численного интегрирования. *Системой условий порядка* называют систему алгебраических уравнений, получающихся при приравнивании соответствующих членов ряда Тейлора точного  $y$  и приближённого  $\tilde{y}$  решений вплоть до  $p$ -го, где  $p$  — порядок метода. Размеры систем условий порядка приведены в [табл. 1](#).

Таблица 1 — Размеры системы условий порядка

класс метода	количество условий порядка					
классический метод Рунге—Кутты	1	2	4	8	17	37
А	2	4	8	16	34	74
В	2	4	10	28	88	292
С	3	6	18	66	276	1224
порядок метода	1	2	3	4	5	6




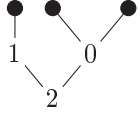
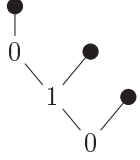
Процесс можно автоматизировать, если каждому элементарному дифференциалу методической погрешности  $y - \tilde{y}$  однозначно сопоставить некоторое дерево  $\tau$  и найти множество всех подходящих деревьев. Пример построения таких уравнений приведён в [табл. 2](#).

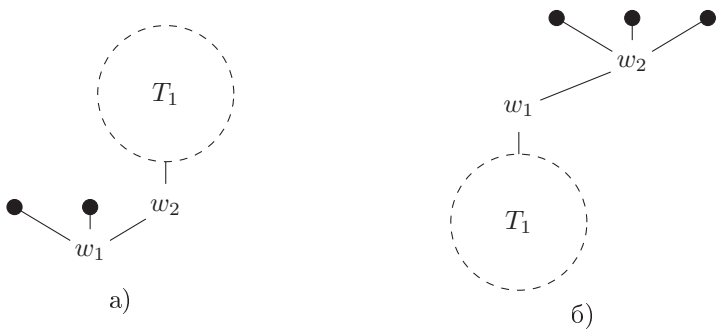
В §3.2 рассматривается возможность численного решения построенной системы. Отмечается, что при количестве уравнений, превышающем несколько десятков, попытки численного нахождения коэффициентов оказываются малоэффективными.

В §3.3 предложен алгоритм использования упрощающих предположений, позволяющих бороться с громоздкостью систем условий высоких порядков. Упрощающие предположения — это дополнительные ограничения, накладываемые на коэффициенты, благодаря которым часть исходных уравнений становится линейно зависимой. Как правило, уравнения, порождаемые определённым видом деревьев, становятся линейно зависимыми от уравнений, порождаемых некоторыми своими поддеревьями (см. [рис. 3](#)).

Приведено описание программы, для систем произвольной структуры строящей систему условий заданного порядка и сводящей её к системе-следствию по заданному набору упрощающих предположений. Программа реализована на языке Python в виде класса помеченных деревьев и скрипта, осуществляющего построение полного набора возможных деревьев, фильтрацию массива деревьев с помощью упрощающих предположений и вывод системы-следствия в виде системы матричных уравнений на языке MATLAB или LaTeX. Код программы приведён в приложении.

Таблица 2 — Примеры построения условий порядка

$\tau$	$\gamma(\tau)$	условие порядка
0	1	$\sum_{\nu} b_{0\nu} = 1$
	2	$\sum_{\nu} b_{1\nu} c_{1\nu} = \frac{1}{2}$
	6	$\sum_{\nu} b_{1\nu} \sum_{\mu} a_{11\nu\mu} c_{1\mu} = \frac{1}{6}$
	5	$\sum_{\nu} b_{2\nu} c_{2\nu}^4 = \frac{1}{5}$
	36	$\sum_{\nu} b_{2\nu} (\sum_{\mu} a_{20\nu\mu} c_{0\mu}^2) \cdot (\sum_{\mu} a_{21\nu\mu} c_{1\mu}) = \frac{1}{36}$
	48	$\sum_{\nu} b_{0\nu} c_{0\nu} \sum_{\mu} a_{01\nu\mu} c_{1\mu} \sum_{\xi} a_{10\mu\xi} c_{0\xi} = \frac{1}{48}$



Деревья, для которых различные упрощающие предположения могут сделать соответствующее условие порядка линейно зависимым от уравнения, соответствующих поддереву  $T_1$ .

Рис. 3 — Использование упрощающих предположений

**Четвёртая глава** посвящена построению расчётных схем на основе решений систем условий шестого порядка для методов классов  $\mathfrak{B}$  и  $\mathfrak{C}$ . Полная система условий шестого порядка для методов класса  $\mathfrak{C}$  приведена в приложении. Система шестого порядка для методов класса  $\mathfrak{B}$  является её подсистемой.

В §4.1 выбраны упрощающие предположения, позволяющие сократить систему условий шестого порядка для класса  $\mathfrak{B}$  с 292 до 82 уравнений, и приведён алгоритм разрешения системы-следствия. Решение в виде семипараметрического семейства приведено в приложении.

При конкретных значениях свободных параметров построена вложенная схема класса  $\mathfrak{B} - \text{RKV6}(4)\{7F\}$  (табл. 3) с оценкой локальной погрешности на шаге. На её основе реализована функция на языке MATLAB с автоматическим выбором шага интегрирования — ode46b, по интерфейсу аналогичная встроенному интегратору ode45. Код ode46b приведён в приложении.

Таблица 3 — Коэффициенты метода  $\text{RKV6}(4)\{7F\}$

$c_{1\nu}$	$a_{11\nu\mu}$						$a_{12\nu\mu}$						$b_{1\nu}$	$d_{1\nu}$
0													$\frac{7}{150}$	$\frac{13}{200}$
$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$					$\frac{2}{9}$						0	0
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$				$\frac{5}{48}$	$\frac{1}{16}$					$\frac{27}{100}$	$\frac{183}{800}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{44}$	0	$\frac{9}{22}$	$\frac{5}{44}$			$\frac{37}{176}$	$\frac{243}{176}$	$\frac{-12}{11}$				$\frac{11}{30}$	$\frac{33}{80}$
$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{36}$	0	0	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{12}$		$\frac{-635}{432}$	$\frac{-167}{16}$	$\frac{100}{9}$	$\frac{44}{27}$			$\frac{27}{100}$	$\frac{183}{800}$
1	$\frac{-3}{7}$	0	$\frac{9}{8}$	$\frac{-5}{28}$	$\frac{27}{56}$		$\frac{29}{4}$	$\frac{1377}{28}$	$\frac{-1425}{28}$	$\frac{-11}{2}$	$\frac{27}{28}$		$\frac{7}{150}$	$\frac{7}{300}$
1	$\frac{7}{150}$	0	$\frac{27}{100}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{27}{100}$	$\frac{7}{150}$	$\frac{7}{150}$	0	$\frac{27}{100}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{27}{100}$	$\frac{7}{150}$	0	$\frac{1}{24}$
$c_{2\nu}$	$a_{21\nu\mu}$						$a_{22\nu\mu}$						$b_{2\nu}$	$d_{2\nu}$
0													$\frac{7}{150}$	$\frac{13}{200}$
$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$					$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$					0	0
$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{48}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{-1}{6}$				$\frac{7}{48}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{-1}{6}$				$\frac{27}{100}$	$\frac{183}{800}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{-31}{176}$	$\frac{-81}{176}$	$\frac{45}{44}$	$\frac{5}{44}$			$\frac{-185}{1584}$	$\frac{-123}{880}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{89}{990}$			$\frac{11}{30}$	$\frac{33}{80}$
$\frac{5}{6}$	$\frac{73}{144}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{-5}{4}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{12}$		$\frac{1031}{3888}$	$\frac{-53}{144}$	$\frac{65}{324}$	$\frac{317}{486}$	$\frac{1}{12}$		$\frac{27}{100}$	$\frac{183}{800}$
1	$\frac{-39}{28}$	$\frac{-81}{28}$	$\frac{279}{56}$	$\frac{-5}{28}$	$\frac{27}{56}$		$\frac{-29}{63}$	$\frac{15}{7}$	$\frac{-103}{168}$	$\frac{-139}{252}$	$\frac{27}{56}$		$\frac{7}{150}$	$\frac{7}{300}$
1	$\frac{7}{150}$	0	$\frac{27}{100}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{27}{100}$	$\frac{7}{150}$	$\frac{7}{150}$	0	$\frac{27}{100}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{27}{100}$	$\frac{7}{150}$	0	$\frac{1}{24}$

В §4.2 выбраны упрощающие предположения, позволяющие сократить систему условий шестого порядка для класса  $\mathfrak{C}$  с 1224 до 62 уравнений. Решение системы-следствия в виде четырёхпараметрического семейства приведено в приложении.

При конкретных значениях свободных параметров построена вложенная схема класса  $\mathfrak{C}$  — RKС6(4){8F,7F,7F} с оценкой локальной погрешности на шаге.

В §4.3 продемонстрирована работа программы ode46b. На различных моделях движения космического аппарата доказаны численные преимущества программы в сравнении с известными методами того же порядка а также со встроенной функцией среды MATLAB ode45.

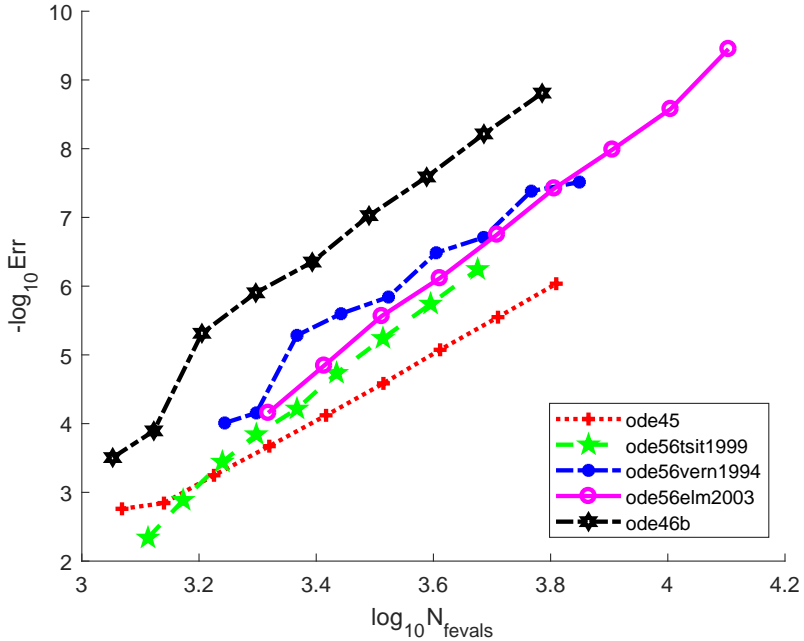


Рис. 4 — Зависимость глобальной погрешности от количества вычислений для модели движения по орбите Аренсторфа

**Пятая глава** посвящена исследованию вопросов устойчивости для структурных методов. Предложена модификация тестовой задачи Далквиста, позволяющая строить области устойчивости для методов классов  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{C}$ . Предлагается утверждение:

**Лемма 1.** *Общие решения линейных однородных СОДУ, принадлежащих классам  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}$ , не бывают устойчивыми и притягивающими.*

Следствием леммы является то, что для систем классов  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}$  проблема устойчивости не возникает.

В **шестой главе** структурный подход применён к непрерывным методам Рунге—Кутты.

В §6.1 рассказывается о модификации одношаговых методов Рунге—Кутты, позволяющей получать непрерывное приближение к точному решению вдоль всего шага интегрирования, и о применении таких методов к решению задач с запаздыванием.

В §6.2 представлена идея построения непрерывных структурных методов численного интегрирования. Построены условия порядков для таких методов и найдены несколько экономичных расчётных схем, позволяющих при сохранении порядка точности производить меньшее количество вычислений по сравнению с известными аналогами.

В **заключении** сформулированы основные результаты диссертационной работы:

1. Продемонстрирована техника модификации ряда математических моделей, позволяющая строить для них экономичные методы численного интегрирования.
2. С использованием программно реализованных алгоритмов сформулированы условия шестого порядка для экономичных методов интегрирования. Найдены упрощающие предположения, обеспечивающие сведение системы условий порядка к разрешимой системе следствию.
3. Решения полученных систем для схем класса  $\mathfrak{B}$  и  $\mathfrak{C}$  найдены и представлены в виде многопараметрических семейств. При фиксированных значениях параметров представлены схемы шестого порядка  $\text{RKVB6}(4)\{7F\}$  и  $\text{RKC6}(4)\{8F,7F,7F\}$ . На основе схемы  $\text{RKVB6}(4)\{7F\}$  реализована функция `ode46b` с автоматическим регулированием шага интегрирования. Проведено численное исследование различных моделей механики и продемонстрирована эффективность `ode46b` в сравнении с известными классическими методами, в том числе с основным интегратором MATLAB — `ode45`.
4. Разработана модификация метода Далквиста для исследования устойчивости структурных методов классов  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{C}$ .
5. Построены непрерывные структурные методы типа Рунге—Кутты.

## Публикации автора по теме диссертации

### В изданиях из списка ВАК РФ

1. Сравнительное исследование преимуществ структурных методов численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений / В. П. Бубнов [и др.] // Труды СПИИРАН. — 2017. — Т. 53, вып. 4. — С. 51—72. — (0,28 п. л.)

2. *Олемской, И. В.* Семейство шестиэтапных методов шестого порядка / И. В. Олемской, Н. А. Коврижных // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2018. — Т. 14, вып. 3. — С. 215—229.

### **В изданиях, индексируемых в Scopus и Web of Science**

3. *Eremin, A. S.* Continuous Extensions for Structural Runge—Kutta Methods / A. S. Eremin, N. A. Kovrizhnykh // Computational Science and Its Applications – ICCSA 2017. — Cham : Springer International Publishing, 2017. — P. 363—378. — (Lecture Notes in Computer Science ; 10405).
4. *Kovrizhnykh, N. A.* On a Two Families of Efficient Fifth Order Schemes for Solving ODE Systems / N. A. Kovrizhnykh, A. S. Eremin // AIP Conference Proceedings. — 2018. — Vol. 1959, no. 1. — P. 030014.

### **В прочих изданиях**

5. *Коврижных, Н. А.* Об оптимальном выборе параметра регуляризации в алгоритме Левенберга—Марквардта / Н. А. Коврижных // Процессы управления и устойчивость. — 2015. — Т. 2. — С. 426—431.
6. *Коврижных, Н. А.* Вложенный шестиэтапный метод шестого порядка точности интегрирования систем структурно разделённых дифференциальных уравнений / Н. А. Коврижных // Процессы управления и устойчивость. — 2016. — Т. 3. — С. 183—187.
7. *Винничек, Н. Н.* Исследование устойчивости структурных методов интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. Н. Винничек, Н. А. Коврижных // Процессы управления и устойчивость. — 2017. — Т. 4. — С. 149—153.
8. *Olemskoy, I. V.* Embedded Methods of Order Six for Special Systems of Ordinary Differential Equations / I. V. Olemskoy, A. S. Eremin, N. A. Kovrizhnykh // Applied Mathematical Sciences. — 2017. — Vol. 11(1). — P. 31—38.