На правах рукописи

Цынгуев Булат Тимурович

Математические модели ранжирования вершин в графах коммуникационных сетей

05.13.18 — математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени кандидата технических наук

Петрозаводск — 2015

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО «Забайкальский государственный университет» на кафедре фундаментальной и прикладной математики, теории и методики обучения математике

Научный руководитель:	**Мазалов Владимир Викторович,** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Буре Владимир Мансурович,** доктор технических наук, доцент, профессор кафедры математической теории игр и статистических решений факультета прикладной математики — процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета
	Гуртов Андрей Валерьевич, кандидат технических наук, главный научный сотрудник кафедры распределенных и мобильных облачных систем Хельсинского института информационных технологий
Ведущая организация:	ФГБОУ ВПО «Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого»

Защита состоится «24» декабря 2015 г. в 16:00 на заседании диссертационного совета Д 212.190.03 на базе ФГБОУ ВПО «Петрозаводский государственный университет» по адресу: 185910, г. Петрозаводск, пр. Ленина, 33.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Петрозаводского государственного университета и на сайте petrsu.ru.

Автореферат разослан «____» ______________ 2015 года.

Ученый секретарь диссертационного совета Р. В. Воронов

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Методы анализа социальных сетей применяются во многих областях науки, таких как экономика, физика, социология, биология и информационные технологии. Одним из базовых понятий в анализе социальных сетей является центральность. Центральность вершины - это важная мера, отражающая то, насколько вершина участвует в процессе распространения информации между остальными вершинами в графе. Традиционной является мера центральности, основанная на модели распространения информации, где учитываются только геодезические пути. При расчете данной центральности предложены и широко применяются алгоритмы, имеющие приемлемую вычислительную сложность. Но пути длиннее геодезических могут играть важную роль в описании и объяснении процессов, протекающих в коммуникационных сетях. Одной из таких моделей распространения информации является модель электрической цепи, где центральность вершин определяется системой линейных уравнений (правила Кирхгофа). Но алгоритмы поиска центральности, основанные на данной модели, имеют высокую вычислительную сложность. Что делает их применение затруднительным для ранжирования вершин графов большой размерности.

Представленная диссертационная работа посвящена исследованию новых моделей ранжирования вершин взвешенных графов, имеющих относительно невысокую вычислительную сложность алгоритма поиска центральности. Таким образом, рассматриваемая тема исследования является актуальной и подтверждается многочисленными исследованиями на протяжении последних десятилетий.

Цель диссертационной работы заключается в построении математических моделей ранжирования вершин в графах коммуникационных сетей и эффективных алгоритмов для вычисления этих характеристик.

Достижение поставленной цели требует решения следующих **задач:**

1. Повышение эффективности алгоритма поиска меры центральности вершин графа на основе модели электрической цепи. В качестве критерия эффективности принимается вычислительная сложность алгоритма.

2. Разработка теоретико-игровых методов ранжирования вершин графа в модели электрической цепи с использованием кооперативной теории игр.

3. Создание программного комплекса для численной реализации на ЭВМ исследуемых алгоритмов и проведение численных экспериментов.

Методы исследования. В диссертационной работе применяются методы теории графов, линейной алгебры и кооперативной теории игр. Для численного моделирования и программной реализации разработанных алгоритмов применяются методы вычислительной математики и прикладного программирования.

Научная новизна работы заключается в следующем:

1. Предложен новый метод вычисления электрической центральности вершин, который позволяет уменьшить вычислительную сложность алгоритма поиска центральности вершин взвешенного графа.

2. Предложен алгоритм приближенного вычисления электрической центральности методом последовательных приближений для ранжирования вершин в графах большой размерности.

3. С использованием методов кооперативной теории игр построена теоретико-игровая модель, характеристическая функция которой строится на основе электрической центральности вершин. С помощью программной реализации на ЭВМ проведены численные эксперименты.

Практическая ценность работы заключается в реализации программы вычисления центральности вершин графа на основе правил Кирхгофа. Данная программа позволяет определить меру центральности вершин в графе путем определения величины среднего тока, проходящего через данную вершину в модели электрической цепи. В программе предусмотрена возможность ранжирования вершин графа на основе правил Кирхгофа с использованием метода последовательных приближений. Программа может быть использована для анализа социальных сетей, коммуникационных сетей и веб-сайтов. Программа прошла государственную регистрацию в Федеральной службе по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие положения:

1. Предложен новый метод ранжирования вершин взвешенного графа на основе правил Кирхгофа. Предлагаемый метод сохранил полезные свойства методов ранжирования на основе модели электрической цепи, но при этом имеет преимущества в вычислительной сложности.

2. Разработан метод приближенного вычисления мер центральности для ранжирования вершин в графах большой размерности. Благодаря этому можно применять данный способ ранжирования на множестве прикладных задач.

3. Предложена теоретико-игровая модель центральности вершин с использованием методов кооперативной теории игр, характеристическая функция которой строится на основе электрической центральности.

4. Создан комплекс программ для численной реализации на ЭВМ предложенных алгоритмов и проведены численные эксперименты.

Связь работы с научными программами, темами: основные результаты диссертации были получены в рамках выполнения исследований при финансовой поддержке РГНФ (проект 15-02-00352) и Отделения математических наук РАН.

Апробация работы. Основные результаты работы были представлены и обсуждены на следующих семинарах и конференциях:

1. Международный семинар „Networking Games and Management", Петрозаводск, Россия, 23-25 июня, 2013;

2. Международная конференция „Дифференциальные уравнения и математическое моделирование", Улан-Удэ, Байкал, Россия, 22-27 июня, 2015;

3. Международный семинар „Networking Games and Management", Петрозаводск, Россия, 5-7 июля, 2015;

4. IV Международная конференция по вычислительным социальным сетям (CSoNet 2015), Пекин, Китай, 4-6 августа, 2015;

а также на семинарах кафедры фундаментальной и прикладной математики, теории и методики обучения математике факультета естественных наук, математики и технологии Забайкальского государственного университета и на семинарах лаборатории математической кибернетики ИПМИ КарНЦ.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 7 печатных работах, из них 2 статьи в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК [2, 1], 1 статья в издании, индексируемом в библиографической базе данных Scopus [3] и 3 тезисов докладов [8, 6, 7]. Получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ [4].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на разделы и подразделы, заключения и списка литературы. Общий объем рукописи составляет 102 страницы. Работа содержит 22 рисунка, 30 таблиц и два приложения. Список литературы включает 79 наименований.

Содержание работы

Во **введении** отражена актуальность диссертационной работы, сформулирована цель исследования, обоснована научная новизна работы, показана практическая значимость полученных результатов, а также представлены положения, выносимые на защиту.

В **первой главе** приводятся различные модели ранжирования вершин в графах, а также рассматривается модель электрической цепи в задаче ранжирования вершин в графе.

В разделе 1.1 представлена классическая модель вычисления центральности, основанная на геодезических путях. В разделе 1.2 рассматривается метод ранжирования PageRank.

Одним из основных недостатков классической меры центральности является то, что в расчетах учитываются только геодезические пути, и не берутся в расчет пути, которые могут быть длиннее геодезических на один или два шага, хотя данные негеодезические пути могут играть важную роль в описании и объяснении процессов, протекающих в коммуникационных сетях.

Рядом авторов (Newman, Brandes, Fleischer) были предложены способы расчета мер центральности, учитывающие негеодезические пути. Одной из таких мер центральности является мера центральности на основе модели электрической цепи или, другими словами, электрическая центральность (current flow betweenness centrality).

В модели электрической цепи граф рассматривается как электрическая цепь с идеальными элементами, где каждое ребро имеет некую пропускную способность (значение обратное сопротивлению), а вершины графа являются ее узлами. Для поиска меры центральности в модели электрической цепи используются правила Кирхгофа. Для этого электрическая цепь заземляется в некоторой вершине t и подается электрический ток в некоторой вершине s. Мерой центральности вершины v служит средняя величина тока, проходящего через вершину v, по всем возможным парам s и t. Таким образом, в модели электрической цепи при расчете меры центральности учитываются не только геодезические пути.

Наилучшая вычислительная сложность известного на текущий момент алгоритма поиска меры центральности в модели электрической цепи равна $O(I(n-1) + mn \lg n)$ [9], где n - число вершин, m - число ребер, $I(n-1)$ - сложность вычисления обратной матрицы размерности $n-1$.

Далее рассмотрим новый способ вычисления центральности для взвешенных графов на основе модели электрической цепи.

В данной работе предлагается модификация модели электрической цепи, которая заключается в том, что каждая вершина цепи соединяется с искусственно вводимой вершиной v_{n+1} ребром с пропускной способностью δ. Электрический ток подается в некоторую вершину s, цепь каждый раз заземляется в одной и той же вершине v_{n+1}. Таким образом, электрический ток течет по цепи с вершины s в вершину v_{n+1}. Мерой центральности вершины v служит средняя величина тока, проходящего через вершину v по всем возможным s. Отметим, что ток на ребрах, инцидентных с v_{n+1} вершиной, не учитывается при расчете центральности.

Представим математическое описание модифицированной модели электрической цепи.

Пусть дан взвешенный граф $G = (N, E, W)$, где N - множество вершин, E - множество ребер, W - матрица весов:

$$W(G) = \begin{pmatrix} 0 & w_{1,2} & \dots & w_{1,n} \\ w_{2,1} & 0 & \dots & w_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n,1} & w_{n,2} & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

где $w_{i,j} \neq 0$ это вес ребра между вершинами v_i и v_j, $n = |N|$ - число вершин. Если вершины v_i и v_j не смежные, то $w_{i,j} = 0$. Пусть G - неориентированный граф, тогда $w_{i,j} = w_{j,i}$.

Далее обозначим через $D(G)$ диагональную матрицу степеней:

$$D(G) = \begin{pmatrix} d_{v_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{v_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{v_n} \end{pmatrix},$$

где $d_{v_i} = \sum_{j=1}^{n} w_{i,j}$ - сумма весов ребер инцидентных вершине v_i в графе G.

Определение 1. *Матрица $L(G)$ называется матрицей Кирхгофа взвешенного графа G, если*

$$L(G) = D(G) - W(G) = \begin{pmatrix} d_{v_1} & -w_{1,2} & \dots & -w_{1,n} \\ -w_{2,1} & d_{v_2} & \dots & -w_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -w_{n,1} & -w_{n,2} & \dots & d_{v_n} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Пусть граф G' получен из графа G путем добавления дополнительной v_{n+1} вершины соединенной со всеми вершинами графа G ребрами с постоянной проводимостью δ. Таким образом, получим следующую матрицу Кирхгофа графа G':

$$L(G') = D(G') - W(G') = \begin{pmatrix} d_{v_1}+\delta & -w_{1,2} & \dots & -w_{1,n} & -\delta \\ -w_{2,1} & d_{v_2}+\delta & \dots & -w_{2,n} & -\delta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -w_{n,1} & -w_{n,2} & \dots & d_{v_n}+\delta & -\delta \\ -\delta & -\delta & \dots & -\delta & \delta n \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Предположим, что единица электрического тока подается в некоторую вершину $s \in N$, и вершина v_{n+1} заземлена. Пусть $\varphi^s_{v_i}$ обозначает абсолютный потенциал в вершине v_i при условии, что источник электрического тока находится в вершине s. Тогда вектор абсолютных потенциалов $\varphi^s(G') = [\varphi^s_{v_1}, \ldots, \varphi^s_{v_n}, \varphi^s_{v_{n+1}}]^T$ в вершинах графа G' определятся следующей системой уравнений (правила Кирхгофа):

$$\varphi^s(G') = L(G')^{-1} b'_s,$$

где b'_s - вектор-столбец, состоящий из $n+1$ элементов, значения которых равны:

$$b'_s(v) = \begin{cases} 1 & v = s, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Матрица Кирхгофа (1) является вырожденной. Примем в вершине v_{n+1} абсолютный потенциал равным 0.

Таким образом, из (2) получим:

$$\tilde{\varphi}^s(G') = \tilde{L}(G')^{-1} b_s,$$

где $\tilde{\varphi}^s(G')$ и b_s получены из $\varphi^s(G')$ и b'_s путем удаления элементов, соответствующих вершине v_{n+1}, а $\tilde{L}(G')$ получен из $L(G')$ путем удаления строки и столбца, соответствующих вершине v_{n+1}. Отметим, что при этом из $\varphi^s(G')$ и b'_s удаляются элементы равные нулю.

Отсюда получаем

$$\tilde{\varphi}^s(G') = [D(G) - W(G) + \delta I]^{-1} b_s,$$

где I - единичная матрица размерности n.

Известно, что абсолютные потенциалы могут быть определены с точностью до постоянного слагаемого. Тогда абсолютные потенциалы $\tilde{\varphi}^s(G')$ можно принять в качестве абсолютных потенциалов в вершинах графа G, т.е.

$$\tilde{\varphi}^s(G) = [L(G) + \delta I]^{-1} b_s. \tag{3}$$

Представим (3) в следующем виде.

$$\tilde{\varphi}^s(G) = [(D(G) + \delta I) - W(G)]^{-1} b_s =$$

$$= [I - (D(G) + \delta I)^{-1} D(G) D^{-1}(G) W(G)]^{-1} (D(G) + \delta I)^{-1} b_s.$$

Матрицы $(D(G) + \delta I)^{-1}$ и $(D(G) + \delta I)^{-1} D(G)$ диагональные с элементами на диагонали $\frac{1}{d_{v_i}+\delta}$ и $\frac{d_{v_i}}{d_{v_i}+\delta}, i = 1, ..., n$, обозначим их D_1 и D_2, соответственно. Матрица $D^{-1}(G)W(G)$ стохастическая, обозначим ее P. Тогда

$$\tilde{\varphi}^s(G) = [I - D_2 P]^{-1} D_1 b_s = \sum_{k=0}^{\infty} (D_2 P)^k D_1 b_s. \tag{4}$$

Из (4) следует, что потенциал можно вычислить рекуррентно в виде:

$$\tilde{\varphi}^s_{k+1}(G) = D_2 P \tilde{\varphi}^s_k(G) + D_1 b_s, \quad \tilde{\varphi}^s_0(G) = 0. \tag{5}$$

Ток, протекающий через ребро $e = (v_i, v_j)$ согласно закону Ома равен $x^s_e = |\varphi^s_{v_i} - \varphi^s_{v_j}| \cdot w_{i,j}$.

Соответственно среднее значение тока протекающего через некоторую вершину v при условии, что источник тока находится в вершине s:

$$x^s(v) = \frac{1}{2}(b_s(v) + \sum_{e: v \in e} x^s_e), \tag{6}$$

где $b_s(v) = \begin{cases} 1 & v = s, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$

Итак, меру электрической центральности в вершине v для взвешенных графов $CF_B(v)$ можно определить по формуле:

$$CF_B(v) = \frac{1}{n} \sum_{s \in N} x^s(v). \tag{7}$$

Таким образом, предлагаемая математическая модель электрической цепи представляет собой систему линейных алгебраических уравнений.

Вычислительная сложность алгоритма поиска электрической центральности вершин для взвешенных графов предлагаемым способом имеет относительно невысокую вычислительную сложность, равную сложности вычисления обратной матрицы $O(n^3)$ (см. формулу (3)).

Отметим, что выражение (7) может быть вычислено с использованием закона больших чисел. Методы приближенного вычисления используются для упрощения и облегчения вычислительной сложности. Метод Монте-Карло может быть легко и естественно использован для получения быстрой оценки электрической центральности. Например, мы можем использовать небольшую часть вершин графа $V_1 \subset V$, выбранных последовательно независимо и равновероятно в качестве исходных для дальнейшего приближенного вычисления электрической центральности всех вершин графа:

$$CF_B(v) \approx \frac{1}{|V_1|} \sum_{s \in V_1} x^s(v). \tag{8}$$

Таким образом, используя только часть вершин в качестве исходных, можно определить вершины с наибольшим значением электрической центральности методом Монте-Карло (8).

В анализе социальных сетей наиболее часто используются два вида мер: классическая центральность (betweenness centrality) и мера близости (closeness centrality). Мера близости вершины $v \in V$ графа G впервые была представлена как:

$$c_C(v) = \frac{n_C}{\sum_{v \neq t} d(v,t)},$$

где $d(v,t)$ - кратчайший путь между вершинами v и t, n - число вершин в графе G, n_C - коэффициент нормировки равный $n-1$.

Мера близости вершины $s \in V$ в рамках модели электрической цепи была определена следующим образом:

$$CF_C(s) = \frac{n_C}{\sum_{t \neq s}(\varphi^{st}(s) - \varphi^{st}(t))},$$

где φ^{st} - абсолютный потенциал в вершине при условии, что источник тока подключен к вершине s, а сток находится в вершине t. Выражение $\varphi^{st}(s) - \varphi^{st}(t)$ соответствует действующему (эффективному) сопротивлению в электрической цепи. Таким образом, действующее сопротивление может служить некой альтернативой для расстояния между вершинами s и t.

В случае, когда абсолютные потенциалы в вершинах графа φ^s вычислены с помощью (3), то меру близости вершины $s \in V$ можно определить как:

$$CF_C^{\delta}(s) = \frac{n_C}{\sum_{v' \neq s}(\varphi^s(s) - \varphi^s(v'))}.$$

Вычислительная сложность алгоритма поиска электрической близости вершин для взвешенных графов имеет ту же вычислительную сложность, что и при поиске электрической центральности, т.е. $O(n^3)$.

В разделах 1.5 и 1.6 найдены в аналитическом виде меры центральности вершин для некоторых частных видов графов: полный двудольный граф и частный случай звезды с одним взвешенным ребром.

В разделе 1.7 на ряде простых примеров проведен сравнительный анализ свойств электрической центральности с методом ранжирования PageRank, где представлены преимущества применения электрической центральности.

В разделе 1.8 представлен пример использования электрической центральности для ранжирования графа сообщества „Теория игр“ в социальной сети *ВКонтакте*, также приведено сравнение результатов ранжирования с методом PageRank.

Во **второй главе** представлена теоретико-игровая модель для вычисления центральности вершин на основе модели электрической цепи. В предлагаемой модели для ранжирования вершин используется известный метод кооперативной теории игр - вектор Майерсона. В данной модели вершины графа рассматриваются в качестве игроков, возможность кооперации игроков ограничена взвешенным графом. Вес ребра в графе отражает силу возможной кооперации соответствующих данному ребру игроков.

Итак, предположим, что множество вершин графа является множеством игроков в некоторой кооперативной игре. Пусть $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ множество игроков. Через 2^N обозначим множество всех его подмножеств.

Кооперативной игрой n лиц будем называть пару $< N; w >$, где $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ — множество игроков, а w: $2^N \to R$ отображение, предписывающее каждой коалиции $S \in 2^N$ некоторое численное значение такое, что $w(\emptyset) = 0$. Функция w называется характеристической функцией кооперативной игры.

Неориентированный граф $g = (N, E)$ состоит из множества вершин N и множества рёбер E. Рёбра представляют неупорядоченные пары вершин, которые мы будем обозначать ij, и $ij \in E$ означает, что вершины $i \in N$ и $j \in N$ связаны в графе g.

Вершины графа идентифицируются с игроками, а ребро ij означает, что игроки i и j могут взаимодействовать напрямую, если и только если $ij \in g$.

Для графа g последовательность различных вершин $\{i_1, \dots, i_k\}$, $k \geq 2$ есть путь от i_1 до i_k, если для всех $h = 1, \dots, k-1$, $i_h i_{h+1} \in g$. Длина пути l — число рёбер в нём, $l = k - 1$. Расстоянием между двумя вершинами является длина минимального пути между этими вершинами.

Граф g на множестве игроков N связный, если для любых двух вершин существует путь в g от одной вершины к другой.

Коалиция S связна, если любая пара игроков в S связана путём, состоящим только из игроков данной коалиции.

Любая коалиция $S \subseteq N$ единственным образом разбивается графом g на максимальные связные подкоалиции, называемые компонентами связности. Множество всех связных компонент коалиции S обозначим через $S|g$.

$$S|g = \{\{i | i \text{ и } j \text{ связаны в } S \text{ через } g\} | j \in S\}.$$

$S|g$ можно интерпретировать как набор более мелких коалиций, на которые разбита коалиция S, если игроки могут взаимодействовать только в соответствии с ребрами в графе g. $N|g$ означает множество всех связных компонент в g.

Пусть дана кооперативная игра w с множеством игроков N и граф g, вершинами которого являются игроки. Для каждого игрока i, данного графа g и характеристической функции w вектор Майерсона $Y(w, g) = (Y_1(w, g), \dots, Y_n(w, g))$ определяется аксиомами компонентной эффективности и справедливости.

Если для любой коалиции S определить характеристическую функцию как

$$w_g(S) = \sum_{K \in S|g} w(K),$$

то вектор Майерсона может быть вычислен по формуле

$$Y_i(w,\ g) = \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \left(w_g(S \cup i) - w_g(S) \right) \frac{s!\,(n - s - 1)!}{n!},$$

где $s = |S|$, $n = |N|$.

Характеристическую функцию в кооперативной игре можно определить на основе модели электрической цепи. Рассмотрим кооперативную игру, где характеристическая функция определяется суммой средних токов, протекающих через вершины соответствующей коалиции. При этом, немного модифицируем модель, исключив из нее входящие токи. Отметим, что слагаемое $\frac{1}{2}b_s(v)$ в формуле (6) дает одинаковый вклад для всех вершин коалиции, и не несет информации об относительном соотношении протекающих токов через вершины коалиции.

Таким образом, определим характеристическую функцию в кооперативной игре как

$$w(K) = \frac{1}{|K|} \sum_{s \in K} x_K^s(v), \quad K \subset V, \tag{9}$$

где

$$x_K^s(v) = \frac{1}{2} \sum_{e: v \in e} x_e^s.$$

В качестве меры центральности можно принять вектор Майерсона в кооперативной игре с характеристической функцией представленной (9). Назовем данную меру электрической центральностью по Майерсону.

Таким образом, электрическая центральность по Майерсону определяется как средний вклад вершины по всем возможным коалициям, где вклад вершины в конкретную коалицию зависит от всей структуры подграфа соответствующего этой коалиции.

В разделе 2.2 на некоторых наглядных примерах приведены результаты ранжирования вершин графа с помощью электрической центральности по Майерсону.

В разделе 2.3 приведено сравнение электрической центральности по Майерсону с другими моделями ранжирования вершин в графах.

В **третьей главе** представлены результаты компьютерного моделирования на примере прикладных задач анализа коммуникационных сетей. Для вычисления электрической центральности вершин разработан программный комплекс в пакете Mathematica.

В разделе 3.1 предложенный нами способ вычисления электрической центральности применяется для анализа значимости вершин графов транспортных сетей Китая, Финляндии, транссибирской магистрали, а также на примере Московского метрополитена.

В разделе 3.2 представлен пример применения электрической центральности для анализа графа публикаций математического портала *Math-Net.ru*.

Данные об авторах и их научных статьях были получены с математического портала *Math-Net.ru* с помощью программы, реализованной на языке Java. По этим данным был построен граф публикаций, в котором вершины графа - это авторы статей, а вес ребра - это число совместных научных статей авторов. Полученный граф является лишь фрагментом реального графа публикаций *Math-Net.ru* и содержит 7606 авторов и 10747 статей, написанных в соавторстве. Общее число авторов математического портала *Math-Net.ru* на момент написания данной работы составляло 78839. Отметим, что при построении данного графа не учитывались статьи, имеющие более 6 соавторов.

Для дальнейшего анализа была взята главная компонента графа, полученного из исходного графа публикаций путем удаления ребер с весом меньше 7. Итоговый граф публикаций представлен на рис. 1 и состоит из 148 вершин и 196 ребер.

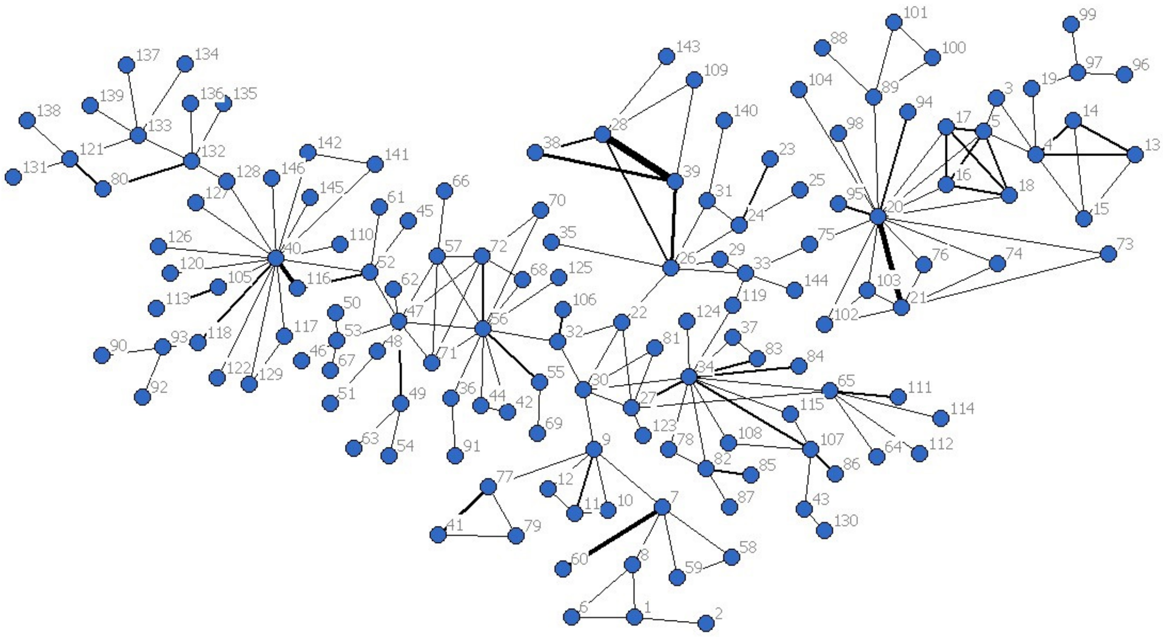

Рисунок 1. Главная компонента графа публикаций Math-Net.ru

На рис. 1 видно, что вершины *20, 34, 40, 47* и *56* являются центрами „локальных“ звезд и должны иметь высокую центральность. Заметим, что вершина *32* также должна иметь высокую центральность, т.к. она соединяет в единый граф две отдельные компоненты.

В результате ранжирования вершин графа, представленного на рис. 1, электрической центральностью с параметром $\delta = 1$ и методом ранжирования PageRank с параметром $\alpha = 0.85$ получаем следующее.

Для электрической центральности с параметром $\delta = 1$ первые 5 мест получили вершины *40, 34, 20, 47* и *56*. Вершина *32* получила 10 место.

Для метода PageRank с параметром $\alpha = 0.85$ первые 5 мест получили вершины *40, 34, 20, 56* и *47*. Однако вершина *32* получила относительно низкий ранг (34 место).

Также были представлены результаты работы метода последовательных приближений рекуррентной формулой (5) при $k = 2$, а также результаты работы метода Монте-Карло при котором использовались в качестве исходных только 10% вершин.

Вычисление электрической центральности методом последовательных приближений за две итерации выявило 6 первых вершин, а из первых двадцати вершин выявлено 12. Метод Монте-Карло с использованием 10% вершин в качестве исходных выявил 15 вершин из 20 первых по значению электрической центральности при $\delta = 1$.

В разделе 3.3 представлен пример ранжирования сайтов научных учреждений Российской академии наук с помощью электрической центральности.

В разделе 3.4 представлен пример применения электрической меры близости в онтологической модели компетенций.

Заключение

В диссертации предлагается ряд математических моделей ранжирования вершин в графах коммуникационных сетей, исследуются свойства данных моделей.

В работе представлен новый способ вычисления центральности для взвешенных графов на основе правил Кирхгофа, которые представляют собой систему линейных уравнений. Предлагаемый способ сохранил полезные свойства мер центральности, основанных на модели электрической цепи, но имеет сравнительно невысокую вычислительную сложность, равную сложности вычисления обратной матрицы, т.е. $O(n^3)$.

Для некоторых частных видов графов (полный двудольный граф и частный случай взвешенной звезды) электрическая центральность найдена в аналитическом виде.

В работе представлен алгоритм приближенного вычисления предлагаемой электрической центральности методом последовательных приближений для ранжирования вершин в графах большой размерности. Представлена возможность применения стохастического метода Монте-Карло для поиска электрической центральности.

На ряде примеров сделано сравнение предлагаемого способа определения центральности с традиционным методом ранжирования PageRank, где показаны некоторые преимущества электрической центральности.

Построена модель с использованием методов кооперативной теории игр, где характеристическая функция строится на основе значений электрической центральности вершин. С помощью программной реализации на ЭВМ проведены численные эксперименты.

Представлены результаты применения предложенного нами способа вычисления электрической центральности для анализа значимости вершин на примерах графа сообщества „Теория игр“ в социальной сети *ВКонтакте*, графа публикаций *Math-Net.ru*, написанных в соавторстве, а также на ряде графов транспортных сетей. Кроме того, представлен пример ранжирования сайтов научных учреждений Российской академии наук.

Разработаны модели и комплекс программ в пакете Mathematica для анализа коммуникационных сетей.

Полученные результаты носят как теоретический, так и прикладной характер.

Список публикаций

1. **Жижченко А.Б., Мазалов В.В., Цынгуев Б.Т. Ранжирование вершин графа публикаций математического портала Math-**

Net.Ru // Труды Карельского научного центра РАН. 2015. №5. С. 34–41.

2. **Цынгуев Б.Т. Задача формирования команды на основе онтологической модели компетенций // Учёные записки Забайкальского государственного университета серия Физика, математика, техника, технология. 2014. №3(56) С. 110-116.**

3. **Avrachenkov K.E., Mazalov V.V., Tsynguev B.T. Beta Current Flow Centrality for Weighted Networks // Lecture Notes in Computer Science, vol. 9197. Computational Social Networks, Springer. 2015. Pp. 216-227.**

4. Мазалов В.В., Цынгуев Б.Т. Программа вычисления центральности вершин графа на основе правил Кирхгофа. 2015. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015617367 от 08.07.2015.

5. Цынгуев Б.Т. Многошаговая игра формирования сети с экспоненциальной выплатой // Математический анализ и его приложения. 2013. №11. С. 59-71.

6. Цынгуев Б.Т. Новый способ вычисления центральности для взвешенных графов коммуникационных сетей на основе правил Кирхгофа // Сборник тезисов представленные на международной конференции „Дифференциальные уравнения и математическое моделирование“. Улан-Удэ, Байкал, Россия, июнь 22-27. 2015. С. 316-317.

7. Мазалов В.В., Цынгуев Б.Т. Ранжирование вершин взвешенных графов коммуникационных сетей на основе правил Кирхгофа // Расширенные тезисы, представленные на международном семинаре „Сетевые игры и менеджмент“. Петрозаводск, Россия, июль 5-7. 2015. С. 35-37.

8. Цынгуев Б.Т. Многошаговая игра формирования сети с экспоненциальной выплатой // Расширенные тезисы, представленные на международном семинаре „Сетевые игры и менеджмент“. Петрозаводск, Россия, июнь 23-25. 2013. С. 98-101.

Цитированная литература

9. Brandes U., Fleischer D. Centrality measures based on current flow // In Proceedings of the 22nd annual conference on Theoretical Aspects of Computer Science. 2005. Pp. 533-544.